

(一) 選擇題(25%)

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, 且 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, 試回答以下各問題 :

- _____ 1. 矩陣 A 之行列式值(Determinant)為 (A) 3 (B) 4 (C) -16 (D) 16
(E) 以上皆非
- _____ 2. 矩陣 A 之特徵值(Eigenvalue)為 (A) 3 和 5 (B) 1 和 2 (C) 2 和 8
(D) 2 和 3 (E) 以上皆非
- _____ 3. 矩陣 A 之特徵向量(Eigenvector)為 (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (E) 以上皆非
- _____ 4. 矩陣 A^2 之值為 (A) $\begin{bmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$
(E) 以上皆非
- _____ 5. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 之值為 (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (E) 以上皆非

(二) 已知函數 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換(Laplace Transform)之定義為 $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$,

試回答下列各問題 :

1. 若 $f(t) = t$, 試證明 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換為 $L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}$ 。 (5%)
2. 若 $f(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$, 試證明 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換為 $L\{f(t)\} = s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$ 。 (5%)
3. 試以普拉斯轉換解初始值問題 : $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ 。 (15%)

(三) 請求出以下一次微分方程式的通解 (general solution) (25%)

$$y' = (y-1)\cot x$$

(四) 請解以下的初值問題 (initial value problem) (25%)

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4, \quad y(0) = 0.3, \quad y'(0) = 0.3$$