

(一) 選擇題(25%)

已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  , 且  $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  , 試回答以下各問題 :

- \_\_\_\_\_ 1. 矩陣  $A$  之行列式值(Determinant)為 (A) 3 (B) 4 (C) -16 (D) 16  
(E) 以上皆非
- \_\_\_\_\_ 2. 矩陣  $A$  之特徵值(Eigenvalue)為 (A) 3 和 5 (B) 1 和 2 (C) 2 和 8  
(D) 2 和 3 (E) 以上皆非
- \_\_\_\_\_ 3. 矩陣  $A$  之特徵向量(Eigenvector)為 (A)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$   
(C)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  (E) 以上皆非
- \_\_\_\_\_ 4. 矩陣  $A^2$  之值為 (A)  $\begin{bmatrix} 25 & 9 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$   
(E) 以上皆非
- \_\_\_\_\_ 5.  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  之值為 (A)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (E) 以上皆非

(二) 已知函數  $f(t)$  的拉普拉斯轉換(Laplace Transform)之定義為  $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  ,

試回答下列各問題 :

1. 若  $f(t) = t$  , 試證明  $f(t)$  之拉普拉斯轉換為  $L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}$  。 (5%)
2. 若  $f(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  , 試證明  $f(t)$  之拉普拉斯轉換為  $L\{f(t)\} = s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$  。 (5%)
3. 試以普拉斯轉換解初始值問題 :  $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = t$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 0$  。 (15%)

(三) 請求出以下一次微分方程式的通解 (general solution) (25%)

$$y' = (y-1)\cot x$$

(四) 請解以下的初值問題 (initial value problem) (25%)

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4, \quad y(0) = 0.3, \quad y'(0) = 0.3$$