

1. 試求  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  之通解 (General Solution)。 (15%)

2. 已知限制含水層中之滲流量計算可根據 Darcy 定律  $Q = kiA = k \frac{dh}{dr} (2\pi r D)$ , 其中  $Q$  是滲流量 (單位:  $m^3/s$ );  $k$  為土壤滲透係數 (Permeability, 單位:  $m/s$ );  $i$  係水力梯度 (Hydraulic Gradient, 無單位);  $A$  為水流通過的截面積 (單位:  $m^2$ );  $h$  係水頭差 (單位:  $m$ );  $r$  係觀測井至抽水井之距離 (單位:  $m$ );  $D$  係限制含水層之厚度 (單位:  $m$ )。若今安排兩個觀測井, 分別位於  $r_1$ 、 $r_2$  位置, 其所對應之觀測井水位面分別為  $h_1$  與  $h_2$ , 試證明限制含水層之滲透係數可表為: (15%)

$$k = \frac{Q}{2\pi D} \frac{\ln(r_2/r_1)}{h_2 - h_1}$$

3. 試解出聯立常微分方程式  $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 5y_2 + 23 \\ \frac{dy_2}{dt} = -5y_1 + 15t \end{cases}$  的通解。 (20%)

4. 請利用 Gauss-Jordan 消去法求出  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  的反矩陣 (20%)

5. 假設函數  $f(x)$  的傅立葉轉換 (Fourier Transform) 定義為

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx, \text{ 請求出以下函數的傅立葉轉換 (15\%)}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

6. 請求出函數  $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$  在點  $(x, y, z) = (2, 1, 3)$  沿向量  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  方向上的方向導數 (directional derivative) (15%)