

1. 函數 $f(t) = 3t + 4$, 請求出 $f(t)$ 的拉普拉斯 (Laplace Transform) 轉換 (25%)

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, 請 (a) 求出 \mathbf{A} 的特徵值及特徵向量 (b) 求出 \mathbf{A}^5 (25%)

3. 試求 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ 之通解 (General Solution)。 (10%)

4. 試解出聯立常微分方程式 $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 6y_1 + 9y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + 6y_2 \end{cases}$ 的通解。 (16%)

5. 由 Darcy 定律知 $Q = kiA$, 其中 Q 是滲流量 (單位 : m^3/s) ; k 為土壤滲透係數 (Permeability , 單位 : m/s) ; i 係水力梯度 (Hydraulic Gradient , 無單位) ; A 為水流通過的截面積 (單位 : m^2) , 試回答以下問題。

(a) 考慮問題之基準面在下游之水位面上 , 試繪出變水頭透水試驗之示意圖 , 並據以說明變水頭透水試驗之流量平衡方程式可表為 :

$$-a \frac{dh}{dt} = k \frac{h}{L} A$$

其中 a 為細管之直徑 ; L 是土樣長度 ; A 係土樣截面積 ; t 是量測時間 ; h 是細管水位。 (12%)

(b) 試證明土壤滲透係數可表為 :

$$k = \frac{aL}{A(t_2 - t_1)} \ln \frac{h_1}{h_2}$$

其中 t_1 、 t_2 分別為開始量測與結束量測時之時間 , h_1 、 h_2 分別為開始量測與結束量測時之細管水位。 (12%)