

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

等效網路法分析梯度折射率變化的光子晶體

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2215-E-216-002-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：中華大學電機工程學系

計畫主持人：吳俊傑

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 11 月 21 日

等效網路法分析梯度折射率變化的光子晶體

Abstract

The guided wave characteristics of graded index photonic crystals are systematically investigated with the use of an equivalent network method. This procedure is based on a combination of the transmission line network theory and the Fourier expansion method. The several type of graded index photonic crystals are taken as examples to demonstrate the present approach, and numerical results are given to illustrate their potential for millimeter-wave and optical device applications.

Key words: photonic crystals; graded index; equivalent network method

摘要

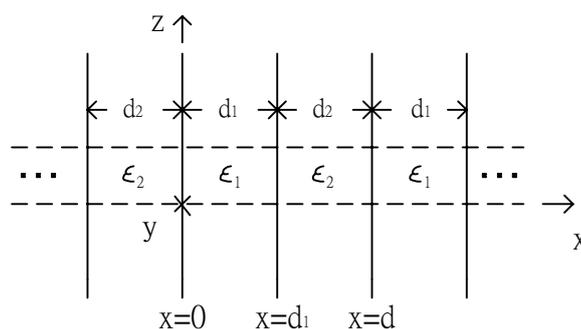
光子晶體結構主要是二十世紀 80 年代提出的新概念和新型人工微細結構光學材料。光子晶體以光子帶隙的存在為主要特徵，其典型結構為折射率週期變化的物體。一維光子晶體是光子晶體最基本的構型，其折射率在一維空間的方向上呈現週期性的分佈。一維光子晶體結構簡單，容易從實驗室中製造，並且兼具二、三維光子晶體的性質，極有可能成為全光通信領域的關鍵材料，因此具有較高的理論價值和廣泛的應用前景。

本研究從一維光子晶體的結構的特點出發，著重研究了無限及有限週期一維光子晶體的光子帶隙與反射頻譜的光學特性。第一部分我們的研究是利用在微波領域經常用於分析波導或光柵結構的等效網路法，推出任意結構一維光子晶體的反射率，透射率和帶隙結構的色散曲線，並利用近四法理解了光子帶系的成因。我們首先分析折射率交替變化的一維光子晶體，除了計算分析帶隙結構外，我們同時也分析每個週期性結構的單包內的場分布。除此之外，作為分析二三維光子晶體的基礎，我們按照 Floquet 解的要求將解中的週期部分用傅立葉級數展開，分析收斂效果。第二部分將上述的程序用於單包內具有梯度折射率變化的內在結構，分析存在梯度折射率材料時代隙結構的變化。

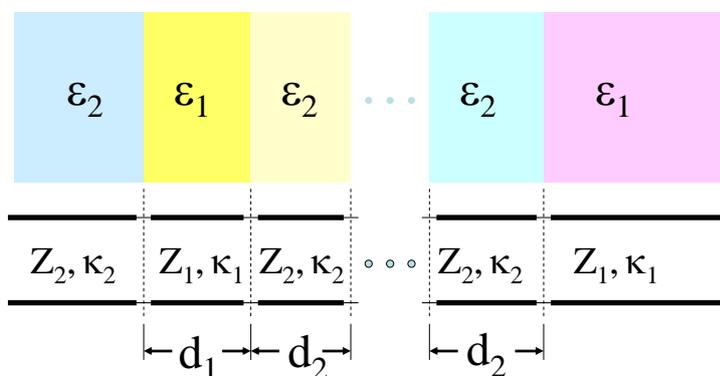
光在周期性結構中的傳播

為了建構週期性介質層中特徵解的完備集，我們沿 y 和 z 軸的兩個方向垂直延伸它的厚度到無限。導致了一個無界的週期性介質。對於具有周期性分片均勻

介質的特殊剖面, Fig. 1 顯示了我們有週期性交替的介質層. 並已用虛線在 Fig. 1 中指出交替變化的介電常數 ϵ_1 和 ϵ_2 . 很明顯地, 這種無限的介質可以視為已經具有可以運用電磁場表達式的多層結構的特例, 並可以將傳輸線網路法分析多層結構的結果用在這裡. 這類的方法廣泛地用處理平面, 二維與三維的電磁解構 [1-2]. 多層結構法提供了許多好處. 第一, 它可產生以三角函數表達的簡單色散關係. 第二, Floquet 解中各個諧波的振幅可以獲得正確嚴格的表達式. 第三, 週期層中的 TE 和 TM 特徵解可以用相同的立足點處理, 我們將會詳細討論. 最後, 我們在確定了特徵解的完整性, 我們將會用這套辦法處理 2D 和 3D 的邊界值問題.



(a)



(b)

Fig.1(a) 週期性多層結構與其座標表達

(b)介質層的週期排列及其等效電路模型

1. 週期性介質的色散關係

Fig.1 顯示了座標系統所附著的結構中, 介質的週期沿 x 方向具有包含兩相鄰介質層的單包, 並且在遍及整個空間的 xy 平面是均勻的. 考慮從 $x=0$ 到 $x=d$ 間的

第一個晶包. 我們首先將多層介質內的 TE 和 TM 模式用等效電壓與電流表示如下:

TE 模式

$$E_y(x, z) = -V(z) \exp(-jk_z z) \quad (1a)$$

$$H_z(x, z) = -I(z) \exp(-jk_z z) \quad (1b)$$

$$H_x(x, z) = \frac{k_z}{\omega \mu_0} V(x) \exp(-jk_z z) \quad (1c)$$

TM 模式

$$H_y(x, z) = I(x) \exp(-jk_z z) \quad (2a)$$

$$E_z(x, z) = -V(x) \exp(-jk_z z) \quad (2b)$$

$$E_x(x, z) = \frac{k_z}{\omega \epsilon_0 \epsilon(x)} I(x) \exp(-jk_z z) \quad (2c)$$

其中 $\epsilon(x)$ 表示介電常數是空間變數 x 的週期函數, 對於雙介電常數的週期性薄膜則分別對應到的是兩個介電常數 ϵ_1 和 ϵ_2 的均勻區域. 我們可以將方程式(1)與(2)代入 Maxwell 方程組後, 可以得到

$$\frac{dV_i(x)}{dx} = -jk_x Z_i I_i(x) \quad (3a)$$

$$\frac{dI_i(x)}{dx} = -jk_x Y_i V_i(x) \quad (3b)$$

從方程式(3)中 在一個薄層內電磁場的變化可以寫為

$$V_i(x) = E_i^+ \exp(-j\kappa_i x) + E_i^- \exp(j\kappa_i x), \quad (4a)$$

$$I_i(x) = Y_i [E_i^+ \exp(-j\kappa_i x) - E_i^- \exp(j\kappa_i x)], \quad (4b)$$

$$\kappa_i = (k_0^2 \epsilon_i - k_z^2)^{1/2}, \quad (4c)$$

$$Y_i = \begin{cases} \frac{k_z^i}{\omega\mu}, & TE \text{ 模式} \\ \frac{\omega\varepsilon_i}{k_z^i}, & TM \text{ 模式} \end{cases} \quad (4d)$$

對 $i=1$ 和 $i=2$ ，分別標示為兩個不同的介質區。這裡， κ_i 和 Y_i 是在第 i 個介質中平面波的傳播常數和特性導納。必須注意，在方程式(4c)中， k_i 是橫向傳播常數，它對週期介質是單獨未知並且需要決定的。

在這一點上，第 i 個介質中向前和向後行波的振幅， E_i^+ 和 E_i^- 取為未知常數。將這些振幅替換，則在介質中每一處中的場可根據邊界表面的場來表示。更明確地說，對 $i=1$ 在方程式(4a)和(4b)中令 $x=0$ ，行波的振幅可以根據 $x=0$ 的場確定為

$$E_1^+ = 1/2[V_1(0) + Z_1 I_1(0)], \quad (5a)$$

$$E_1^- = 1/2[V_1(0) - Z_1 I_1(0)], \quad (5b)$$

其中 Z_1 是介質 1 中的特性阻抗，是定義於方程式(4d)中 Y_1 的倒數。將方程式(5a)和(5b)代入方程式(4a)和(4b)，我們獲得，在層 1 中每一處的場，

$$\begin{bmatrix} V_1(x) \\ I_1(x) \end{bmatrix} = \tilde{T}_1(x) \begin{bmatrix} V_1(0) \\ I_1(0) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中 $\tilde{T}_1(x)$ 稱為介質 1 的特徵矩陣並定義為

$$\tilde{T}_1(x) = \begin{bmatrix} \cos \kappa_1 x & -jZ_1 \sin \kappa_1 x \\ -jY_1 \sin \kappa_1 x & \cos \kappa_1 x \end{bmatrix}. \quad (7)$$

同樣地，當我們在方程式(4a)和(4b)中令 $x=d_1$ 而 $i=2$ ，在層 2 中行波的振幅為

$$E_2^+ = 1/2[V_2(d_1) + Z_2 I_2(d_1)] \exp(j\kappa_2 d_1), \quad (8a)$$

$$E_2^- = 1/2[V_2(d_1) - Z_2 I_2(d_1)] \exp(-j\kappa_2 d_1). \quad (8b)$$

將方程式(8a)和(8b)代入方程式(4a)和(4b)中而 $i=2$ ，我們可以獲得層 2 中每一處的場表示

$$\begin{bmatrix} V_2(x) \\ I_2(x) \end{bmatrix} = \tilde{T}_2(x-d_1) \begin{bmatrix} V_2(d_1) \\ I_2(d_1) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中 $\tilde{T}_2(x-d_1)$ 稱為層 2 的特徵矩陣並定義為

$$\tilde{T}_{12}(x-d_1) = \begin{bmatrix} \cos \kappa_2(x-d_1) & -jZ_2 \sin \kappa_2(x-d_1) \\ -jY_2 \sin \kappa_2(x-d_1) & \cos \kappa_2(x-d_1) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

實際上，在層 1 輸出界面的場可以由令 $x=d_1$ 從方程式(9)中獲得為

$$\begin{bmatrix} V_1(d_1) \\ I_1(d_1) \end{bmatrix} = \tilde{T}_1(x) \begin{bmatrix} V_1(0) \\ I_1(0) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

這一個式子定義了層 1 輸入與輸出間的關係； $\tilde{T}_1(d_1)$ 稱為層 1 的傳遞矩陣。同樣地，層 2 輸入與輸出的關係由下式給出

$$\begin{bmatrix} V_2(d) \\ I_2(d) \end{bmatrix} = \tilde{T}_2(d_2) \begin{bmatrix} V_1(d_1) \\ I_1(d_1) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\tilde{T}_2(d_2)$ 是層 2 的傳遞矩陣。

在 $x=d_1$ ，邊界條件需要電場和磁場的切線分量橫過界面連續，它是等效於兩個行向量相等的條件：

$$\begin{bmatrix} V_1(d_1) \\ I_1(d_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2(d_1) \\ I_2(d_1) \end{bmatrix} \quad (13)$$

從方程式(12)，並憑藉方程式(13)和(11)，我們可以獲得單包的輸入-輸出關係，

$$\begin{bmatrix} V_2(d) \\ I_2(d) \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} V_1(0) \\ I_1(0) \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中 \tilde{T} 是一個單包的傳遞矩陣，並由 \tilde{T}_1 和 \tilde{T}_2 的乘積給出為

$$\tilde{T} = \tilde{T}_2(d_2) \tilde{T}_1(d_1) \quad (15a)$$

從方程式(7)和(10)的 \tilde{T}_1 和 \tilde{T}_2 的定義傳遞矩陣 \tilde{T} 可以明確地寫成

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (15b)$$

矩陣元素為

$$T_{11} = \cos \kappa_1 d_1 \cos \kappa_2 d_2 - Z_2 Y_1 \sin \kappa_1 d_1 \sin \kappa_2 d_2, \quad (15c)$$

$$T_{12} = -j(Z_1 \sin \kappa_1 d_1 \cos \kappa_2 d_2 + Z_2 \sin \kappa_2 d_2 \cos \kappa_1 d_1) \quad (15d)$$

$$T_{21} = -j(Y_1 \sin \kappa_1 d_1 \cos \kappa_2 d_2 + Y_2 \sin \kappa_2 d_2 \cos \kappa_1 d_1) \quad (15e)$$

$$T_{22} = \cos \kappa_1 d_1 \cos \kappa_2 d_2 - Z_1 Y_2 \sin \kappa_1 d_1 \sin \kappa_2 d_2 \quad (15f)$$

這樣的傳遞矩陣， \tilde{T} ，對週期性介質中的每一個單包都成立。介質中的電磁場和它的傳播特性可以極方便地用傳遞矩陣的本徵向量和本徵值來表示，我們下面將這樣做。

讓 λ 為 \tilde{T} 的一個本徵值，並且讓 f 為與之對應的本徵向量，即，

$$\tilde{T}f = \lambda f, \quad (16)$$

對於二階的傳遞矩陣 \tilde{T} ，本徵值可以由如下的特徵方程式決定

$$\lambda^2 - (Tr\tilde{T})\lambda + \det(\tilde{T}) = 0 \quad (17)$$

其中 $Tr\tilde{T}$ 是矩陣 \tilde{T} 的跡等於兩個對角元素的和，而 $\det(\tilde{T})$ 是矩陣 \tilde{T} 的行列式值，通常是等於1，因為定義在方程式(10)和(13)的傳遞矩陣 \tilde{T}_1 和 \tilde{T}_2 的行列式值也都等於1。因此， \tilde{T} 的兩個本徵值必須互為倒數。我們因此或許可以用指數形式表示兩個本徵值為

$$\lambda_1 = \exp(-j\kappa d) \quad (18a)$$

$$\lambda_2 = \exp(j\kappa d) \quad (18b)$$

其中 κ 稱為本徵指數。因為在這個例子中兩個本徵值的和必須等於 \tilde{T} 的跡，從方程式(18c), (18f) 和(21)中，我們獲得

$$\cos \kappa d = \cos \kappa_1 d_1 \cos \kappa_2 d_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{Y_1}{Y_2} + \frac{Y_2}{Y_1} \right) \sin \kappa_1 d_1 \sin \kappa_2 d_2 \quad (19)$$

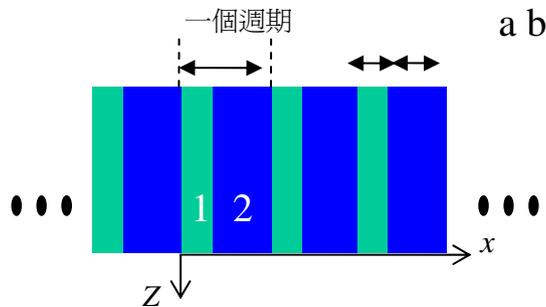
稱為週期介質的色散關係。

我們可以藉由上述對多層色散與場的分析用於平面波對 2D 與 3D 光子晶體散射，入射波的 k_x 假定為已知；事實上， k_x 可以藉由 k_{xn} 來取代，對任何整數 n 。色散方程式可以視為決定唯一的未知， k_z ，的方程式，藉由方程式(4c)和(4d)可以描素與 κ_1 ， κ_2 ， Y_1 和 Y_2 之間的關聯。再一次地 k_z 可做為色散方程式的根而決定，而傳遞矩陣 \tilde{T} 可以由方程式(15)決定。最後，我們可以直接決定二階傳遞矩陣 \tilde{T} 的兩個本徵向量，這些本徵向量將在隨後假設為已知。考慮方程式(14)和(16) 每一個本徵向量指定一個單包輸入面的場，即 $V_1(0)$ 和 $I_1(0)$ ；單包輸出面的場簡單的正比於輸入表面的場一個等於對應本徵值的因子。由指定在邊界表面的場，在連續兩層中向前和向後行波的振幅可以利用方程式(5)和(8)確定；因此在單包中每一處的場可以由方程式(4a)和(4b)完全決定。由 \tilde{T} 的本徵向量所決定的電場和磁場稱為週期介質的本徵場或特徵場。

模擬結果：

我們首先將等效傳輸線網路法用於只有兩層單包的週期性薄膜結構，我們將依據單包內薄膜折射率的性質將分析的情況分成 (1) 兩種折射率材料光程相同的均勻周期性結構 (2) 兩種折射率材料光程不同的均勻周期性結構 和 (3) 其中一種材料為折射率漸變的週期性多層結構。

1. 均勻結構層的能帶圖與反射率圖



(圖 2) 一維週期的介質結構

考慮(圖 2)結構，它的色散方程式可以根據布洛斯定理，透過傳輸矩陣或等效傳輸線法的計算^[1,2] 我們可以得到兩種不同材料的週期性多層結構的色散關係如下

$$\cos(\kappa d) = \cos(\kappa_1 a) \cos(\kappa_2 b) - \frac{1}{2} \left(\frac{Y_1}{Y_2} + \frac{Y_2}{Y_1} \right) \sin(\kappa_1 a) \sin(\kappa_2 b) \quad (20)$$

其中

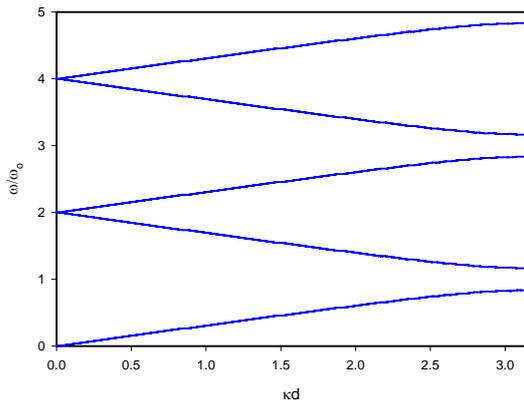
$$\kappa_i = \sqrt{k_i^2 - k_z^2} = \sqrt{k_o^2 \epsilon_i - k_z^2} \quad i = a, b$$

$$Y_i = \begin{cases} \kappa_i / (\omega \mu_o) & TE \\ (\omega \varepsilon_o \varepsilon_i) / \kappa_i & TM \end{cases} \quad i = a, b$$

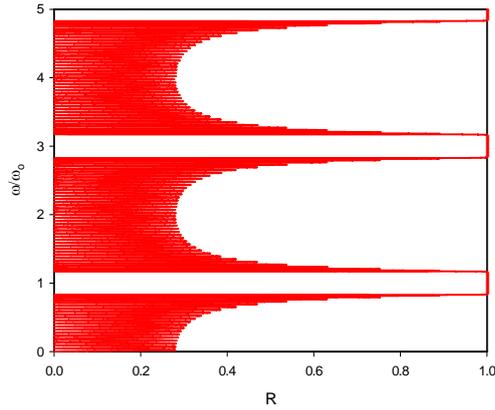
方程式(20)中的幾個參數，是需要稍加說明的。首先 κ_i 代表週期重複結構中每一層電磁波垂直於多層膜的傳播常數，而下標 i 則分別表示第一種材料和第二種材料。 a 和 b 分別表示每一種材料的厚度。 Y_i 則是波在兩種不同介質的波導納，並且將 TE 和 TM 的兩種波的型態寫出來了。我們經由方程式(20)可寫出程式，透過解根程序，我們得到在布魯斯淵區內的能帶圖。

同樣的，傳輸矩陣可以拿來算有限週期層的反射率，然而實際計算發現當週期數達到一定的數量之後，再增加週期數，反射率圖不再有明顯的改變；換句話說，可以計算有限週期層的反射率圖來取代無限週期層的反射率圖，條件是週期數要夠多。(在以下反射率圖形都是取 21 個週期層來計算。)

我們以括號中的參數 ($\varepsilon_1 = 5.5225$ & $\varepsilon_2 = 1.9044$ 和 $a = 740nm$ & $b = 1260nm$)，來計算正向入射電磁波的色散關係圖與反射率關係圖形，其結果分別顯示於(圖 2 a) 與(圖 2 b)。



(圖 3 a) $n_1 a = n_2 b$ 時的能帶圖



(圖 3 b) $n_1 a = n_2 b$ 的反射率圖

這樣的薄膜參數是可以對應到真實的材料，介質層 a 為 ZnS $\varepsilon_1 = 5.5225$, 介質厚度 $a = 740nm$; 介質層 b 為 MgF2 $\varepsilon_2 = 1.9044$, 介質厚度 $b = 1260nm$ 。一維週期性結構的空間週期數為 21 共 43 層介質。空間週期 $d = a + b = 2000nm$ 。介質層 a 的填充率因子為 $f = a/d = 0.37$ 。基頻 ω_o 由

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2},$$

$$n = (n_1 a + n_2 b) / d, \quad k_o = \frac{\pi}{d},$$

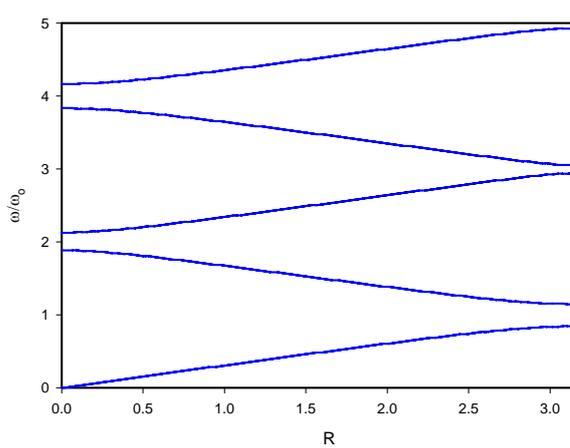
$$\omega_o = \frac{c}{n} \times \frac{\pi}{d} = \frac{c\pi}{n_1 a + n_2 b}$$

按上述參數 ω_0 所對應的波長為 λ_0 為6955.6nm。我們首先注意到，圖(3 a)表示 ω/ω_0 對 kd 的關係，也就是所謂的帶隙結構圖。(圖 3 b)則是21個週期層薄膜的反射率對頻率的關係圖。我們很容易可以理解(圖 2 a)帶隙所在的區域剛好與反射率圖的阻帶的位置完全一致，即(圖 3a)與(圖 3 b)中的禁帶寬度與反射率阻帶的峰值的同一個 ω/ω_0 值的寬度一致。因此儘管只是利用有限層的週期結構來分析無限多層的週期薄膜仍能獲得相當一致的結果。

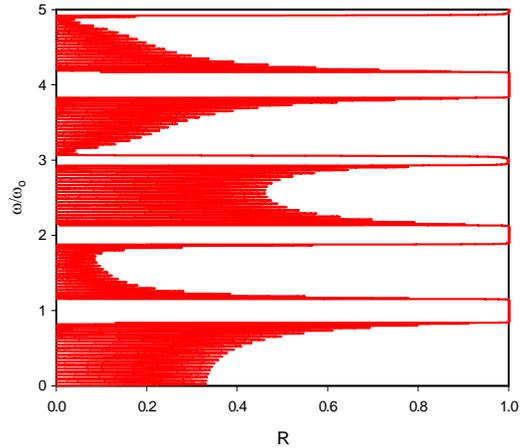
2. 光路徑相等或不相等時的帶隙結構

當單胞中兩個基元有相同的光程($n_1a = n_2b$)，方程式(1)會是 $\cos(kd) = 1$ ，也就是在 ω/ω_0 是偶數倍時，沒有禁帶。這裡我們使用的結構參數為($\epsilon_1 = 5.5225$ & $\epsilon_2 = 1.9044$ 和 $a = 740nm$ & $b = 1260nm$)，計算得到(圖 2 a)與(圖 2 b)。

當兩個介質的光路徑不相等時， $\cos(kd) > 1$ 或 $\cos(kd) < -1$ ，不但奇數倍有禁帶，在偶數倍也有禁帶出現，可由(圖 3)看出。這裡我們使用的結構參數為($\epsilon_1 = 5.5225$ & $\epsilon_2 = 1.9044$ 和 $a = 1260nm$ & $b = 1260nm$)。



(圖 3 a) $n_1a \neq n_2b$ 時的能帶圖



(圖 3 b) $n_1a \neq n_2b$ 的反射率圖

3. 週期性多層介質中單胞折射率漸變結構

由於漸變光纖(GI)的特點是可以等化與漸變平面垂直傳播的不同模態的光之延遲時間，改善模態間的分散，進而提高傳輸頻寬^[3]。所以我們也引入漸變折射率的想法進來，遷就傳輸矩陣的方法，我們用分割更小週期層厚度來模擬連續漸變的情況。考慮把介質層2分割成11小塊(如圖 4)，介質1用空氣取代($n_1 = 1$)



(圖 4) 利用切割單元來模擬折射率的漸變結構

被分割 11 等份的介質 2 可等效為一均勻層(如圖 5)，其對應的平均折射率用 \bar{n} 表示

$$\bar{n} = (n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16}) / 15$$

其中 $n_2 \sim n_{16}$ 代表那 15 小塊每塊的折射率



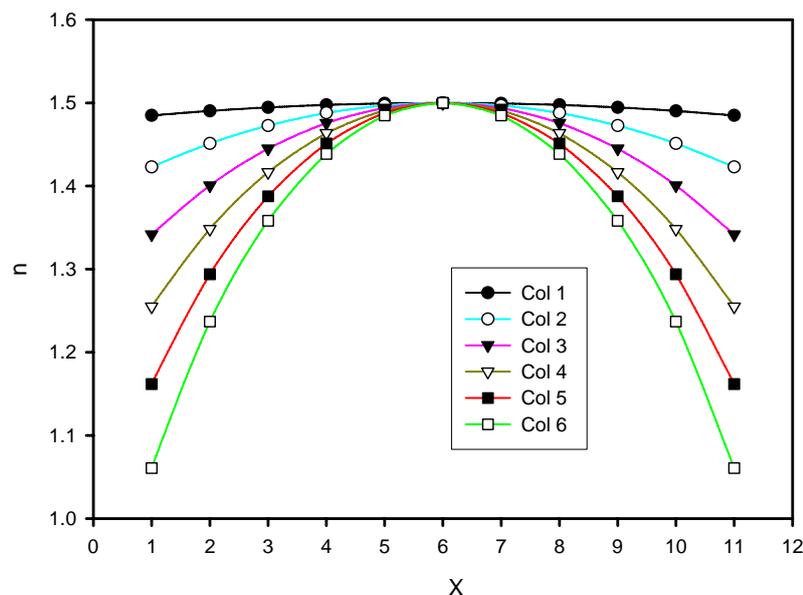
(圖 5)漸變結構可等效為一個均勻結構
由漸變光纖的折色率公式(21)我們可以計算出這 15 層的折射率值

$$n_{(r)} = n_7 [1 - 2\Delta(\frac{r}{5})^2]^{1/2} \quad (21)$$

其中的變量 Δ ，是為了比較不同變化率的漸變曲線，而定義出來的一個變量，定義為

$$\Delta = \frac{n_9 - n_{15}}{n_9}$$

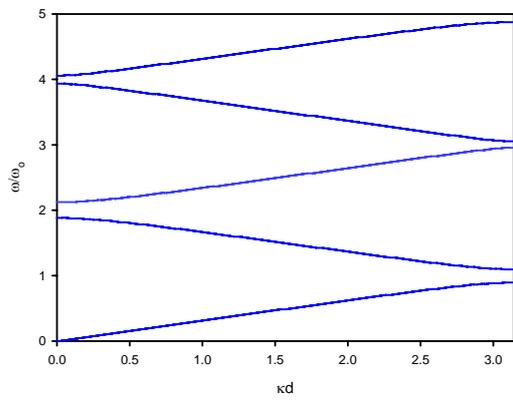
由於漸變光纖是中間折射率大，越遠離中心，折色率越小，所以 $\Delta > 0$ 一定成立。
當 n_9 選定，在改變 Δ 值的條件下，可得拋物線變化的折色率曲線(如圖 6)



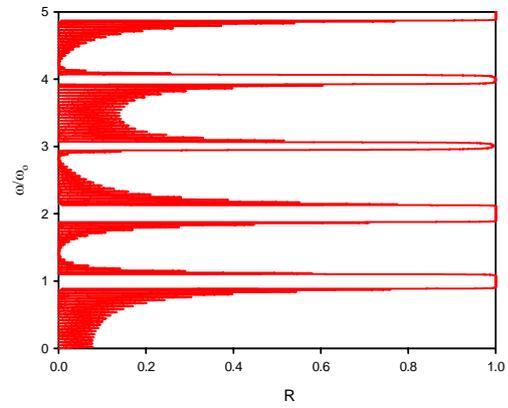
(圖 6)折色率變化圖形

有了所要的折色率值，透過第一節的方法，我們可以畫出隨 Δ 增加，對應的能帶

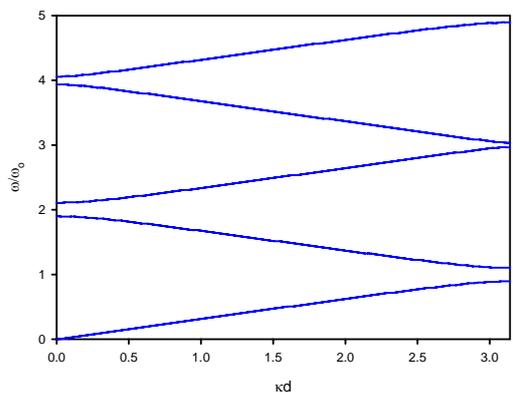
圖與反射圖如下



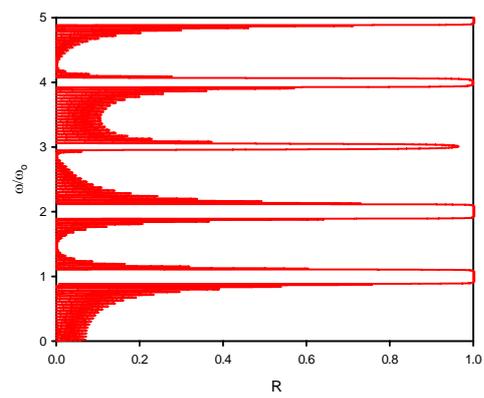
(圖 7 a) $\Delta = 0.01$ 的能帶圖



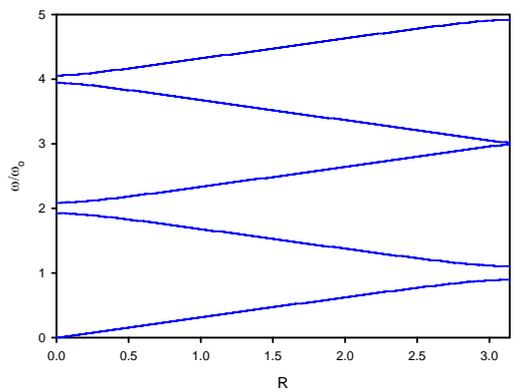
(圖 7 b) $\Delta = 0.01$ 的反射率圖



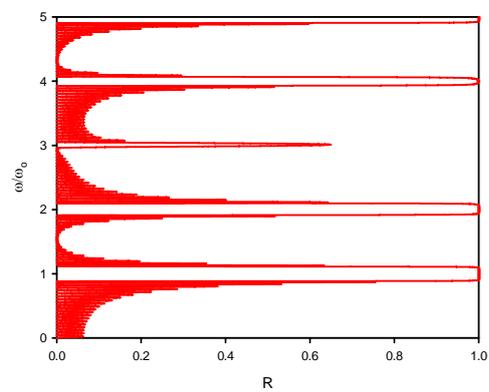
(圖 8 a) $\Delta = 0.05$ 的能帶圖



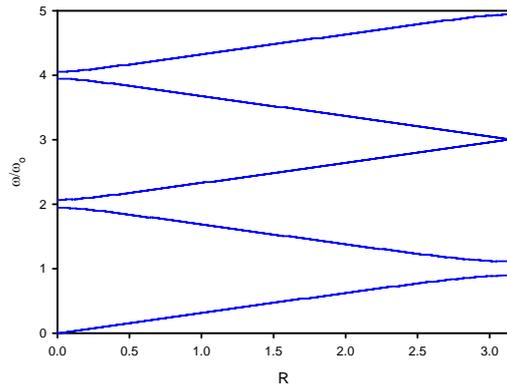
(圖 8 b) $\Delta = 0.05$ 的反射率圖



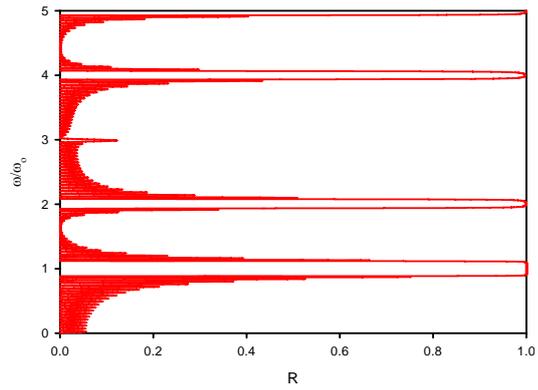
(圖 9a) $\Delta = 0.10$ 的能帶圖



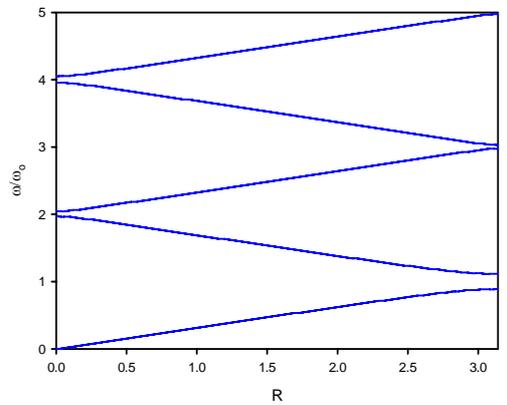
(圖 9 b) $\Delta = 0.10$ 的反射率圖



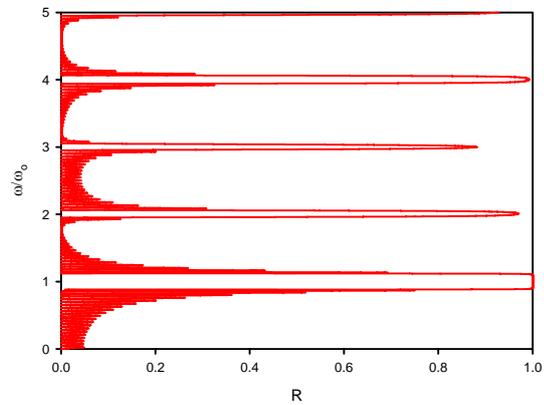
(圖 10 a) $\Delta = 0.15$ 的能帶圖



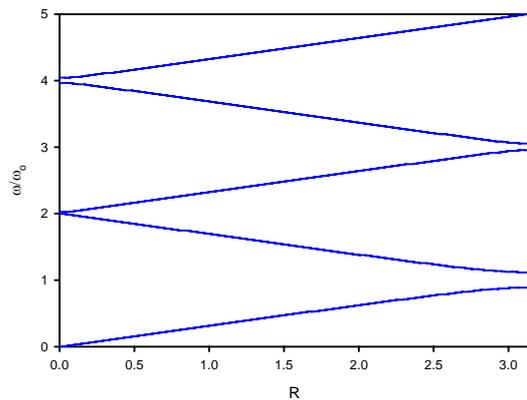
(圖 10 b) $\Delta = 0.15$ 的反射率圖



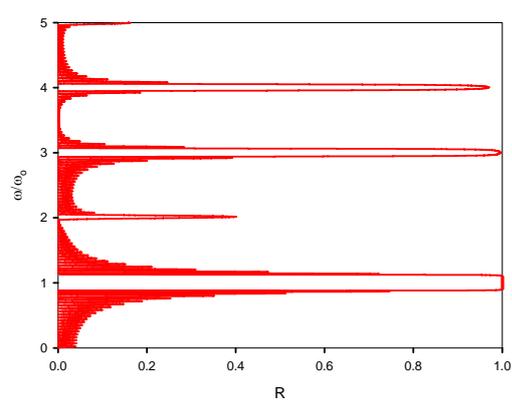
(圖 11 a) $\Delta = 0.20$ 的能帶圖



(圖 11 b) $\Delta = 0.20$ 的反射率圖



(圖 12 a) $\Delta = 0.25$ 的能帶圖



(圖 12 b) $\Delta = 0.25$ 的反射率圖

從上面圖形可觀察到下面的情形 當 $\Delta = 0.01$ ，如(圖 7a)四個禁帶都存在。這是合理的因為此時的 $n_a \neq n_b$ 。而(圖 7b)為 ω/ω_0 對反射率的作圖，也可以很清楚地

看到帶隙的位置與反射阻帶的位置和寬度極為吻合。我們持續改變參數 Δ 的值，當 $\Delta = 0.05$ ，如(圖 8a)第三個禁帶開始變窄，同時也觀察到同一位置反射帶急劇下降，也就是 $3\omega/\omega_0$ 位置處的帶隙變小。此時的 $\bar{n} = 1.4694$ 。持續改變參數 Δ 的值，如(圖 9a)當 $\Delta = 0.10$ ，第三個禁帶明顯變窄，此時反射率約 0.65。此時的 $\bar{n} = 1.4377$ 。持續改變參數 Δ 的值，當 $\Delta = 0.15$ ，如(圖 10b)第三個禁帶的反射率下降到 0.15 左右。此時的 $\bar{n} = 1.4045$ 。持續改變參數 Δ 的值，當 $\Delta = 0.20$ ，如(圖 11a)第三個禁帶快速變寬(如圖 11b 反射率上升到 0.87)，而相鄰的第二個禁帶所對印的反射率不再是 1，此時 $2\omega/\omega_0$ 處的帶隙急劇的消失。此時的 $\bar{n} = 1.3696$ 。當 $\Delta = 0.25$ ，如(圖 12a)第三個禁帶的反射率回升到 1，相鄰的第二個禁帶的反射率下降到 0.4，此時第四個禁帶的反射率已經快數下降到 0.2。此時的 $\bar{n} = 1.3326$ 。可以發現 Δ 的改變是會影響各個帶隙的寬度，並使 $3\omega/\omega_0$ 和 $2\omega/\omega_0$ 處的帶隙交替出現。

4. 週期層中的場形與傅利葉級數近似

從電磁學中入射波與反射波的直觀物理概念，我們可以寫出在介質層內場的數學形式

$$Ae^{-jkx} + Be^{+jkx} \quad (22)$$

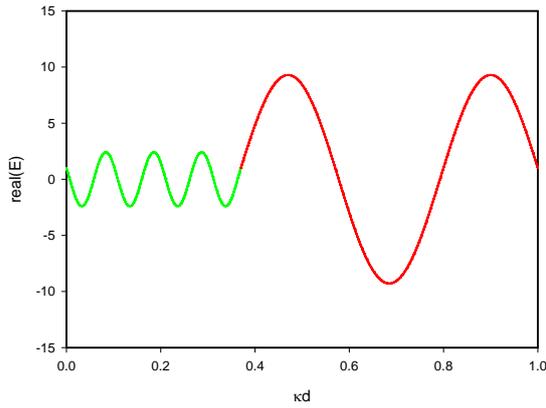
在考慮多層介質層內的場情況下，上面的數學形式必須在考量相位累積的情況下加以修正，所以每一層的表達式都不相同，換句話說，當嘗試要畫出無限週期層中每一層內的場圖時會是困難的一件事。考慮介質層無限週期排列，根據 Floquet-Theory，週期層裡面的場中沿著 x 方向的變化可以表達如下

$$u(x) = e^{-j\kappa x} p(x) \quad (23)$$

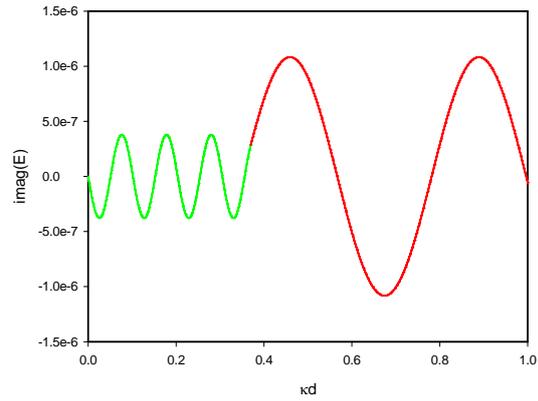
其中 $p(x)$ 是週期 d 的函數，滿足

$$p(x + d) = p(x)$$

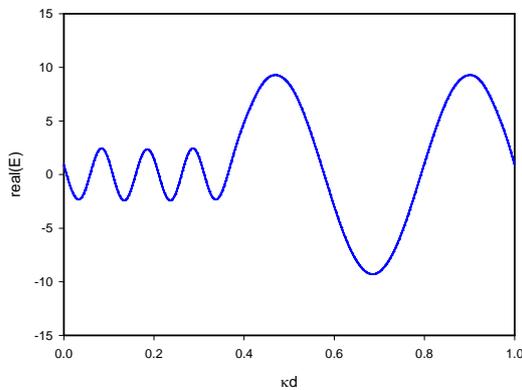
我們藉由前述原理的部份與等效傳輸線電壓與電流的表達式可以將周期層中每一單胞內場的實部與虛部表示於圖 12。此外，為了建立起分析二維與三維光子晶體的理論基礎，我們可將多層結構視為無限週期的結構，因此為了因應分析這類的問題，我們需要將沿著 x 方向的場變化以傅利葉級數展開。因為 $p(x)$ 是週期函數，透過富立葉展開，在足夠富立葉項疊加後可以表達週期層內的場。取一個週期層有兩個均勻介質組成，分別是 $\epsilon_a = 10$ 和 $\epsilon_b = 1$ ，厚度分別為 74nm 和 126nm，頻率 $3e+16$ ，當傅利葉級數項為 $n=15$ ，透過上面的富立葉展開可得(圖 14)的結果。(圖 13)中的綠色和紅色線是用方程式(23)分別算出在介質 1 和介質 2 內的場，藍色實線是在考慮一個單胞的情況下將方程式(4)用傅立葉級數表示，當中的 $P(x)$ 則用富立葉展開(取 31 項)。除了兩端邊界外，都會是良好收斂。



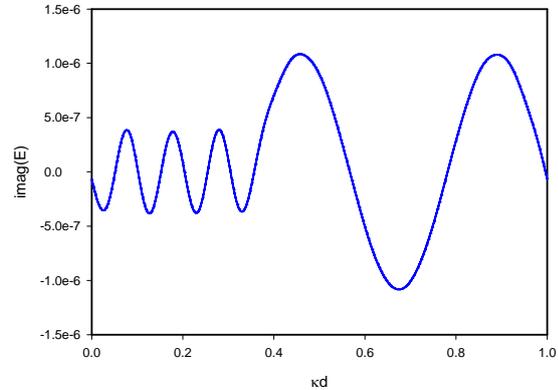
(圖 13 a)電場的實部



(圖 13 b) 電場的虛部



(圖 14 a)富立葉展開的實部電場



(圖 14 b) 富立葉展開的虛部電場

這樣以用富立葉展開來計算無限週期層內的場，是可行而且快速的並且可以用於分析 2D 與 3D 光子晶體結構的基礎。並且經由單胞內折射率的調變，

結 論

我們已經完成一維的能帶與反射率計算，接下來用到二維情況，透過第四節的富立葉展開，計算出大範圍(2D)週期性變化的場分布。如果再加上透過傳輸矩陣來計算折色率拋物線漸變的方法，就可以計算把光子晶體光纖中的光子晶體柱改成漸變光纖下的場分布，也許也會改善光子晶體光纖在多模操作下的傳輸效率。

參 考 文 獻

1. S. T. Peng, "Rigorous Formulation of Dielectric Grating Waveguides-General Case of Oblique incidence," J. Opt Soc. Am. Ser. A, Vol. 6, 1989, pp. 1869-1883.
2. Song-Tsuen Peng; Oliner, A.A. "Guidance and Leakage Properties of a Class of Open Dielectric Waveguides: Part I--Mathematical Formulations", IEEE Trans.

- Microwave theory and Tech., MTT. Vol. 29., pp. 843-855, 1981.
3. Fink Y, Winn J N, Fan Schanhui, A Dielectric Omnidirectional Reflector, *Science* 1998 282: 1679-1682
 4. P YEH, A YARIV, CS HONG , Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I- General theory, Optical Society of America, Journal, 1977,67(4):423~438
 5. 李銘淵著-光纖通訊概念-全華科技圖書公司 ISBN:957-21-0021-1
 6. 王輝和李永平,“用特徵矩陣法計算光子晶體的帶隙結構”, 物理學報, 第 50 卷, 21 期, pp. 2172-2176, 2001.