

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 多相流場數值模擬技術開發(II) 研究成果報告(完整版)

計畫類別：個別型  
計畫編號：NSC 96-2623-7-216-001-D  
執行期間：96年01月01日至96年12月31日  
執行單位：中華大學機械工程學系

計畫主持人：牛仰堯

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理：邱詠憲、莊詠成  
臨時人員：徐唯淵、林宜勳、王凱弘、黃君萍、許廷旭、湯漢威

處理方式：本計畫涉及專利或其他智慧財產權，2年後可公開查詢

中華民國 97年03月11日



## 摘 要

本文目的為發展一個多維、非穩態可壓縮多相流含空蝕現象的數值模式。如我們所知，在多相流的計算分析中，不同流體的界面捕捉以及模擬相變化的過程仍然是極大的挑戰。本文將以混合守恆之多相可壓縮 Navier-Stokes 方程式做為統御方程式，並模擬不可壓縮及可壓縮全流域。本文加入預調法模擬相變化的過程，數值方法則採取具有 TVD 效應之 MUSCL 型式，並以 Roe 的數值通量分離法處理空間通量的離散，並以 LU Decomposition method 處理時間離散，使程式能在數值穩定與計算時間上求得較佳之平衡。本文驗證之例子為三維鈍頭體空蝕現象以及二維收縮/擴張流道的分析，分析結果與相關實驗的數據比對均能獲得令人滿意的驗證。

**Keyword:** *Cavitation, Multi-Phase Flow, TVD, MUSCL, Roe, LU Decomposition*

# 目 錄

目錄 .....	3
符號說明 .....	4
<b>一、序論 .....</b>	<b>6</b>
1.1 前言 .....	6
1.2 文獻回顧 .....	10
<b>二、數值模式 .....</b>	<b>15</b>
2.1 統御方程式 .....	15
2.2 空蝕模式 .....	18
2.3 數值離散 .....	19
<b>三、數值結果與討論 .....</b>	<b>26</b>
3.1 三維鈍頭體模擬 .....	26
3.2 二維收縮/擴張流道分析.....	28
<b>四、結論 .....</b>	<b>30</b>
參考文獻 .....	32

## 符號說明

$\tau$	人工時間
$t$	物理時間
$p$	壓力
$l$	液相
$g$	氣相
$\rho_m$	混合密度
$\dot{m}_g$	氣體到液體之質量轉換率
$\dot{m}_l$	液體到氣體之質量轉換率
$\alpha$	體積佔有率
$U$	曲線座標速度
$u$	卡氏座標速度
Re	雷諾數
$D$	物體直徑
$\mu$	黏滯係數
K	空蝕係數
$p_0$	入口壓力
$p_v$	蒸氣壓
s/d	鈍頭體從鼻端開始算起的表面距離和其直徑的比值

$C_p$	壓力係數
$\xi, \eta, \zeta$	曲線座標
$g$	重力
$\Gamma$	人工壓縮法之預調矩陣
$\Gamma_{nc}$	保守變數轉為原始變數之矩陣
$t_\infty$	特徵時間
$U_0$	入口流速
$\lambda$	特徵值
$X$	特徵向量矩陣
$n$	物理時間
$k$	人工時間
$S$	來源項
$\Lambda$	特徵值矩陣
$T_\infty$	參考溫度

# 一、序論

## 1.1 前言

在真實流場中，往往以多相(Multi-Phase)的形態存在。兩相物質(至少一相為流體)所組成的流動系統，若流動系統中物質的相態多於兩個，則稱為多相流。常見的如分離流(Separated Flows)、氣泡流(Bubbly Flows)、泥漿流 (Slurry Flows)、氣相-粒子流 (Gas-Particle or Droplet Flows) 及氣-液體相變化流場等。其中液-氣二相流在國防工業中應用範圍可說是十分廣泛；而在工業用管路系統中，多相流場則常出現於燃燒鍋爐、工廠排放管、火焰噴嘴等[1]。

在計算可壓縮二相流體時有其困難之處，首先氣體的壓縮性要比液體來的強，事實上液體更為接近不可壓縮流。再者，空氣中之聲速與液體之聲速比約差四倍之多，這表示以傳統 Navier-Stokes 求解二相流體時必需解決極為複雜之數值方法。兩相流研究的基本出發點是在於建立兩相模式和基本方程組。在此基礎上須要解決的項目包含有各相的壓力、速度、溫度、密度和(液/氣)體積佔有率，以及相之間的相互作用、壓降、與流動穩定性等。特別是目前在高科技的迅速發展下，正面臨著溫度場、速度場、濃度場、電磁場等各種場相互耦合下的相變化過程和溫度的控制。然而，兩相流的理論分析比單相流困難得多，描述兩相流的常用的微分方程組至今尚未有建全的發展。如今較為學者們大量採用的理論是兩種類型的簡化模式：均相模式與分相模式[1]。

均相模式：

是將兩相介質看成是一種混合非常均勻的混合物，乃假定處理單相流體的概念和方法是仍然適用於兩相流，不過，這必須對它的物理性質及傳遞性質作合理的假定。

分相模式：

認為單相流的概念和方法可分別用於兩相系統的各個相，同時考慮兩相之間的相互作用。

以上兩種模式的應用都還存在不少的困難點，不過，在計算技術蓬勃發展的推動下，或許往後會有進一步的發展空間。但最終影響的因素還是歸咎於兩相流在質量、動量和能量的傳遞過程乃是一非常複雜的傳輸現象，而且其中過程也涉及幾個基礎學科，如相變化、流體力學、熱力學、熱傳學等，不過，從這些領域當中還是能夠得到一些廣泛的共識。

多相流在CFD先驅者中受到與日俱增的研發重視，由大型量測到發展成熟的單相算則，變成多成分系統複雜性的提升。但是，在那些單相方法之後的多相CFD分析中，仍有一些數值和物理模式的挑戰產生。在這些之中的構造為多組成的密度比、離散界面的存在、重大的質量轉換率、非平衡的界面力學、極低的混合音速與壓縮效應的關連產生、多成分的存在和真空波的增殖等。當一個數值方法建構或用在多相流上時，這些都要特別的注意。

工程師對自然界和潛水體及渦輪機中空蝕的興趣導引了研發人員去研讀，並且嘗試去模擬大尺度的空蝕現象持續了十年。相對的，自從這些流動的流體力學經常被非旋轉和旋轉的非黏滯影響控制以來，簡單的分析法已被廣泛、成功的用來模擬空蝕現象。但是，很多複雜的物理現象都經常和這種空蝕息息相關，包含了黏滯效應、非穩態、質量傳遞、三維的延伸和壓縮性。雖然有一些複雜的物理現象可以被簡單的物理模式所模擬，漸趨成熟和廣泛的多相計算流體力學方法，已經被一些應用這些方法的團隊針對這類空蝕現象的分析做有目的的研發。

此研究的動機是根據最近的成果來研發關於水下的載具。在研發這種載具中，因為這種非穩態特性的流動，使得空蝕扮演了重要的地位。它可以造成非穩定的流體動力、重大的干擾、結構的腐蝕以及震盪問題等。為了要控制這些問題，精確的預估物體表面空蝕流發生的範圍和行為是必要的。另一方面，空蝕現象嚴重減低了物體表面的黏滯阻力。因此，因為空蝕而使得水下達到高速行進變成可能。它可能發生在物體的部分表面，或是持續生長到極長的地步。後者被稱之為超空蝕現象[2]。空蝕現象的發生是因為流體加速流過物體表面的區域，其壓力低於蒸汽壓所致。接著水會在此區域蒸發，形成一個填滿蒸汽的空洞。這些空洞由於水噴流的再進入而有崩壞的傾向進而使得流體變的不穩定。因此一個週期不規則的氣泡生成和成長程序就此發生，進而造成氣泡填充和崩壞的結果(見圖 1)[3]。



空蝕氣泡依型態可以大略歸納為兩類：

### 1. 空氣空蝕：

當流場中的壓力隨著流速加大而降低至某一程度，其壓力尚未達到液體的飽和蒸氣壓，然而此時原本溶於液體當中的部份氣體，由於壓力的降低，使其從液體當中被釋放出來，因而有氣泡的產生。

### 2. 蒸汽空蝕：

流場當中的壓力降低到比液體的飽和蒸氣壓更低，此時大量的液體可迅速的汽化為蒸汽，充滿在低壓區中。

空蝕是當靜壓下降到比蒸氣壓低時液體內的蒸發作用。這種現象通常在固體周圍的流動產生，而且它會強烈的影響流場和鄰近的結構。舉例來說，在水利機械中，多個低壓區(葉片前面邊緣的吸入邊、頂端、靠近側板的分離流)都是容易受到空蝕影響的。蒸氣的出現導致了葉片負載改變，以及強大的力量作用在水泵元件上。如果汽/液結構成長情形劇烈，那麼它們將會導致大量的效能損失。氣泡結構的崩壞也關係到干擾和侵蝕，導致額外的保養操作。這些效應主要是依賴在平均時間的形成和兩相結構的位置。

此外這些氣泡的體積和形狀包含了即時的常態變動。這種不穩定的行為是直接關係到水泵中擾動的發生，例如震動、流率的變動和壓縮性的影響等。因此，了解非穩態二相流的空蝕結構對於渦輪機械和水利機械設備的設計是很重要的。

根據 Reboud J. L.和 Stutz B.等人[4]的實驗發現，在固體上出現的空蝕區域是非常複雜的：它們的結構(平滑/粗糙、穩定/不穩定)乃是取決於表面的形狀和粗糙度(凡托利 Venturi 效應、水翼、葉片)和操作的條件。對一個穩定的空蝕現象來說，雖然區域總是會變動，它的空蝕長度對時間來說幾乎是固定的。相反的，不穩定的空蝕區域經常採取一個週期的行為：這種附在固體上的空蝕成長進而產生一個再進入的噴流。它主要是由液體所組成，沿著固體表面流向上游然後通到空蝕的下游斷開處。這產生的蒸氣區於是被主要的流動給帶走，直到它進入高壓區然後

崩壞；殘存的空蝕部份重新擴展然後繼續開始新的週期。不論是穩定或是非穩定的例子，空蝕發生的區域都是極複雜的兩相結構，在某些尺寸下它總是不穩定的。

在兩個不可壓縮流體間的界面上，由於空蝕而使得密度和黏滯梯度有升高的趨勢。在估算這類流體時，銳化界面的發生處，代表了許多數值問題考量上的困難性。很多的方法都是用來處理這類流體的問題，包括體積追蹤、正面追蹤法等。

另一個被許多作者使用的方法是尤拉模式，把每個方程式分開用來描述每個相。兩個不同形式的統御方程通常是用來捕捉界面的，稱為多流體模式和混合模式。多流體模式是由一組守恆方程式所形成，對每個相和界面上的交互作用項都如來源項一般加入方程式裡。對混合模式來說，動量方程都是用來描述混合，而一個分離的連續方程則是被每個相所利用的。相位連續方程式的其中之一在混合模式的其他形式中，可能會被混合的連續方程式所取代。在本研究中，除了混合的連續及動量方程之外，分離的體積佔有率方程也都被用來表示相的轉換。

為了要估算空蝕現象，模擬從水到蒸汽或從蒸汽到水的質量傳遞率，對空蝕過程的物理認知是需要的，空蝕的空洞可能會被暴露在比臨界要高的壓力之下。一個被 C. L. Merkle 等人[5]所使用的是針對蒸發和凝結過程的模式。在此模式下，從水到蒸汽的質量傳遞率是設為對兩個液體的體積佔有率，以及局部和蒸汽間壓力差異的一定比例。

先前研究的目標是要建構一個算則，主要是針對水中空蝕現象的估算。我們主要是集中在這類流體的數值問題，特別是在高精度數值方法可能造成數值震盪的界面上。雙時步階法是藉由採用統御方程裡的人工時間項作為非穩態的計算。

純粹之可壓縮高速流數值模式，在工程應用機會較小，因此本文旨在建立一套可同時模擬不可壓縮及可壓縮全流域之數值模式。其採用之統御方程式是以 Navier-Stokes 方程式為主。數值模式基本關鍵在於需利用預調法，來消除或改善原可壓縮高速流數值模式，應用於可壓縮低速流時，所遭遇之數值解失真與難收斂之問題。

因軍事研究以及航空工業發展需求，帶動可壓縮 Navier-Stokes 方程式之數值解有快速成熟之發展，應用方面相當廣泛。也因此，將原本發展於高速流之程式，直接使用於低速流似乎是可行之方法，然而實際應用之後，卻發現兩個問題：首先是收斂性，由於當流速相當低時，此系統造成特徵值剛勁度(stiffness)問題，使得求解之時間步階(time step)受到嚴重之限制而變得很小，大大減緩收斂速度或甚至無法收斂至穩態解；其次是解之精確化，目前許多數值試驗證明以可壓縮流程式解低速流時，其解之品質會隨馬赫數之降低而惡化。而經過預調化之統御方程式仍可以化為雙曲型守恆律，因此可利用發展成熟之可壓縮流數值技巧解之。數值算例證明，本模式可同時模擬極低音速至超音速之各類流場。

如上述以可壓縮流方程式，解低速流有其不可避免之缺點，但發展可同時求解低速流與高速流，即所謂全流速(all-speed flows)之方法則有其實質上之需求。原因之一為高速流場中會有局部低速流區域，反之亦然。因此一個好的工具，應能同時有效地處理低速流與高速流；另外一個理由，為使用者可以方便維護，發展者及使用者只需熟悉一套軟體，這是極大之優勢。

## 1.2 文獻回顧

用來模擬完美氣流問題的高解析算則的發展在過去 30 年間已經達到極大的進展。根據震波以及在單相流(single phase flows)中不連續的成功解析，這些成功的數值技巧都確實的應用在可壓縮多重流體(multifluid)和含有複雜相界面、材質不連續以及相轉變行為的多相流(multiphase flows)精確模擬。這些與上面提到多相轉變流類型的工程問題的應用都廣泛的在動力冷卻系統、燃料傳輸系統、水下空蝕現象以及液滴腐蝕問題中見到。如[6,7]所提到的，空蝕是一個在多相流中重要的現象。最為人所知的空蝕現象關係到三個觀點:由於流體內部的壓力低於飽和蒸汽壓導致流體內部氣泡的形成、成長和崩潰。蒸汽泡或是流體內的空蝕常常是以很高的頻率在崩壞並且產生動力壓迫去侵蝕微小的金屬元件壁面。因此，對空蝕現象有所認識並避免金屬壁面的侵蝕是必要的。在空蝕流的模擬中最主要的問題是由於多種音速的現象導致多尺寸(multi-scale)時間存在於混合流中。在兩相混合中的音速和在個別的相中的音速相比可能會非常的低。因此，多相流具有頻繁的局部

特徵，這個特徵在流體內伴隨著震波的存在可能會是次音速或甚至是超音速的，儘管流體的膨脹可能維持本質上的不可壓縮性。這些狀況顯示了一個巨大的挑戰，特別是在算則的數值穩定度上。目前傳統之氣-液二相數值模式往往無法有效處理高速可壓縮流在低壓區型成後所造成空蝕現象，如水面下超高速投射物之空蝕現象，在國防工業中高速魚雷、潛艇等都屬於此類之空蝕現象產生。當然發展此數值模式並非只能在水面下高速投射物，類似的結構還有高速噴嘴。有些高壓注油器會以極高的速度將流體注入燃燒室內，在此類突縮流道中雖然壓力極高，然而一旦流體進入窄化流道後其產生之空蝕現象卻占了非常重要的地位。這種突然的氣化現象會引發非常嚴重的不良後果，如何計算此類空蝕現象已成了流體力學中重要的課題。

在歷史上，當具體的說明氣泡外形和經驗條件時，大部分用來模擬多數的空蝕現象是依賴用於液態的勢流法(potential flow method)。改編的勢流法由於它們的計算效率，和對超空蝕結構的估算效能，在今日仍廣泛地使用著[8]。

近來，更多廣泛的 CFD 方法被發展用來分析這些流體。這些方法中有一類，考慮單一連續方程透過狀態方程式在蒸汽和液體間有密度的不連續變化。單一均質連續方程式(homogeneous single-continuity-equation)[9] 被廣泛地使用在平板和超空蝕的分析上。雖然這些方法可以直接模擬超空蝕載具分析所需的黏滯效應，但它們本質上還是無法分出可壓縮和不可壓縮氣體間的區別。

藉由解決個別液相和汽相領域的連續方程式，可以用來說明和模擬液體、可壓縮氣體和不可壓縮氣體領域的流體力學和熱力學。因為界面的力學是忽略的，所以像這樣多種類的處理也稱為均質的方法，也就是說，在同個控制體積所屬的組成要素裡，是假設為不滑動的。有一些研究人員已經採用了這種差別的模擬，對大多數自然空蝕的分析來說，是用來說明雙相成分的[5,10,11]。對雙相成分來說，這些方法和”單一均質連續方程式”是極有關聯的。上面所提到關於界面質量轉換的模擬是可以取代狀態方程式的。平板和超空蝕流具有很大的密度比、相當不連續的自由空蝕流界面以及由於通氣會有多重汽相成分的特性。因此，所使用的 CFD 方法必須要和這些物理現象有效地配合。

為了求解保守形式之 Navier-Stokes 方程式，在空間離散上通常使用上風 (upwind) 法，細分又可分成通量差分分解法(FDS)與通量向量分解法(FVS)兩種。Roe 等人[12]與 Osher 等人[13]兩者即為 FDS 中較為著名者；而使用 FVS 中，Steger 和 Warming[14]與 Van Leer[15]兩者則最常被人引用。通常統御方程式中時間項的差分必須以疊代(iteration)的方式隨時間趨進以接近解析解(analytical solution)，也就是所謂的時間趨近法[16]。Jameson 等人[17,18]發展出使用 Runge-Kutta 之多重步階法以處理通量平衡，常用於處理 Navier-Stokes 之 Runge-Kutta 法，可細分為二階、三階、四階。使用高精度之 Runge-Kutta 法雖然較為精準，但相對便耗時許多，於求解多相流場時更為明顯。

另外，在求解高速二相流體時必需注意到的是，液-氣二相都必需是可壓縮性的，並且二者在計算過程中其單相狀態能獨立存在而互不干擾。首先考慮可用來計算數值模式則是液-氣二相保守型式方程式(two phase formulation of the conservation equation)，此傳統數值模式在二相中皆為可壓縮性，且有現成的文獻[19,20]可參考。然而處理高速空蝕現象時，這類數值模式存在一些已知的缺點，其一為在純氣、純液之狀態下此方程式並無確切的數學根據，其二則為無法精確處理二相界面，事實上根本無法有效計算液、氣之體積比，Rogue 等人[21]在 1998 年就曾明確的指出其缺點。基於上述原因，文獻[22]中改以混合模式求解高速空蝕現象。

多種數值方法在過去已經被提出來以精確的捕捉流體的界面，例如 VOF 法[23,24]，等位函數法(level set method)，向前追蹤法(the front tracking method)以及界面捕捉法[25]。然而，可壓縮性的效果和相轉變在他們的數值模式中都不予考慮。如同我們所知，在低速空蝕流的數值計算中，低馬赫速液態流體通常都被認作是可壓縮的。然而，在液體壓力和密度場之間的耦合是非常弱的，特別是在接近不可壓縮的方式上。即使在流體內加入非常大的壓力梯度，在密度上的變化也是非常微小的。相對來說，在密度場中微小的數值誤差可能會導致壓力波估計上的劇烈跳動，以及相界面的不連續，這些都是在液-氣空蝕流中重要的現象。此外，關於高速水下空蝕模式的模擬，Saurel 和 Cocchi [26]不只考慮了壓縮性的效果，也考慮跟時間有關的飽和模式。並且，氣相是用理想氣體來做模擬，而液相是以 Tait 的狀態方程式來處理。他們使用含有人工消散項的高階中央有限體積離散，來計

算組合過的狀態方程混合真實流體模式，模擬相的轉變或是單相流的現象。

有很多的物理和數值模式都被用來研究穩定的空蝕現象。它們在等於蒸氣壓的固定靜壓下通常包含了描述汽/液界面的流動區域。這種形式是藉由解決反向的問題所獲得。之前在水泵空蝕流的數值和理論模式或是螺旋槳葉片是由 Kuney 等人[27]根據這些穩態空蝕的數值模擬所提出的例子。在時間精度的形式下，這種形式的模組是可以用來模擬早期再進入噴流組成的階段，但是因為流場中多重汽/液界面的處理困難，使得這些不足以完成蒸氣區的程序模擬。因此，這些模式只能用來預估空蝕的平均形狀，且不適合用在非穩態的空蝕情形。

在大部份討論空蝕現象之文獻中，多偏向於研究低馬赫數與不可壓縮流。為了要模擬這種非穩態的現象，例如脈動的空蝕和蒸汽區的散佈，一種替代性的方法被用來模擬液體的空蝕，把它視做一個均質的液/汽的兩相混合。在這種例子中，傳統的假設為忽略在這兩相中可能的滑動，這會導致單相流體的密度從純液體到純蒸氣可能超出極大的範圍。在多維模擬中的主要數值問題，是兩個極不同流體條件的同步處理：兩個幾乎為不可壓縮的流體(純液體和純蒸氣)，以及過渡時在液汽間的高壓縮性流體。大多數的方法在液/汽密度比較低的時候都有很大的困難。這種方法已經從不同的方式來研發：

Delannoy 和 Kueny[9]提出了一個架構可以很強健的聯結混合密度和靜壓：它們使用了一個叫 barotropic 的定律  $\rho(P)$ ，描述了在不可壓縮流場和過渡區的混合密度。這類的模式在最近被 Merkle [5]等人所應用。他們在多種幾何外型間得到令人滿意的結果，像是凡托利型導管或是水翼等。

Kubota 等人[28]把流體裡氣泡行為和密度的演進作一個相關的聯繫。一個給定氣泡數目的入口條件，它們的演進是被一個叫 Rayleigh-Plesset 的方程式根據壓力場所統御。它假設氣泡都是球體，並且相互保持距離。因此體積佔有率在理論上被限制為一個小的數值，比實驗的數據要小的多。從那時起，這種方法便被廣泛的研發。

Merkle 等人[5]和 Kunz 等人[29]最近提出了第三種發展：他們考慮兩個質量平

衡的方程式，一個對液體，另一個對蒸氣。一個蒸發/凝結的項在這些方程裡控制了兩相間質量的傳遞。這種結果和先前的是非常相近的，但這種方法更有其優點，它可以考慮到其他非凝結的項以及時間對質量傳遞現象的影響。然而，非常少的作者針對空蝕現象得到一個完整的脈衝行為。沿著表面的迴流形成，導致空蝕區的分離，還有下游雲狀蒸氣的對流，這些仍然都是非常難以模擬的。主要的兩個數值方法都被用來模擬非穩態的空蝕現象。較主要的困難為類不可壓縮流體非穩態流場，與相轉變區域的極高壓縮性關聯的計算需求。

有一個方法是根據針對低馬赫數可壓縮時間步進的改寫。這種解析原是為了高壓縮性的流體所設。在低壓縮性和不可壓縮流的模擬例子裡，可察覺到它的效率有明顯的下降。這眾所皆知的問題已經被許多作者所注意，並且在預調方法 (preconditioning method) [30,31]的介紹下解決。它包含了由預調矩陣虛假時間衍生物的相乘，也修正了方程式和加速收斂，不需要去修改所提供的每個時間步驟精度便可以正確地收斂。Merkle 等人在 1993 年把它用在隱式算則裡，無論是 barotropic 定律或是雙質量方程模式都獲得滿意的結果。液/汽比密度比降低到 0.01。Hoeijmakers 等人在 1998 年發表了一個相似的發展，是把簡單的預調法應用在顯式算則裡：液/汽比在它們的例子裡不會降到 0.05 以下。Kunz 等人[29]最近也發表一些關於這種算則中有希望的結果，是根據雙質量傳遞方程式所使用的一個三流體的方法，並且導出非凝結氣體的存在[32]。

一個替代的數值方法，特別是針對不可壓縮流體的計算，就是所謂的壓力校正法，它是根據最初由 Patankar[33]所提出的 SIMPLE 算則所開發的。Delannoy 和 Kueny[9]利用這種算則來處理空蝕現象，把質量方程式考慮為一個密度傳遞方程式，這是依據 barotropic 狀態定律的壓力。此方法最初是被拿來開發無黏性流體，可以捕捉到混合中極強烈的密度梯度。

在軸對稱鈍頭體上流體力學的空蝕是用非穩態可壓縮之 Navier-Stokes 方程來針對多流體成分做計算。這些統御方程式離散在結構性網格上，並且使用通量限制的迎風算則。預調的雙時步進法通常是用來做非穩態的計算上。特徵系統可以從統御方程之對流項的 Jacobian 矩陣來求得。此特徵系統適合用在高密度比的多流體流並且提供數值的高穩定度和快速收斂的效果，是可以用來計算單/多相流體

的一種數值方法。

## 二、數值模式

本文所使用的混合模式是用來對空蝕流做數值模擬的。在此模式，流體在界面上假設熱和力的平衡，並且將流體速度設為連續。因此，當單一連續方程式用在各個流體成份時，動量方程式常用來描述流體的混合。相的連續方程式將以體積佔有率寫成。

### 2.1 統御方程式(Governing Equations)

此方程式描述了液體、蒸氣和可壓縮氣體的流體混合。蒸氣的連續方程被混合連續方程所取代來簡化特徵系統。來源項加入到混合和液體的連續方程式來模擬液/氣、氣/液質量轉換率。因此，統御方程可以被寫成：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial G_v}{\partial \zeta} + S \quad (1)$$

在此  $t$  為物理時間。

Weiss and Smith [31]於原始方程式中，加入了預調項的概念，並利用人工時間  $\tau$  的加入，使非穩定流體達到雙時步階(dual time stepping)，表示如下：

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \Gamma_{nc}^{-1} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(E-E_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(F-F_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(G-G_v)}{\partial \zeta} = S \quad (2)$$

其中：



$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \\ \rho Y \end{pmatrix}; \hat{Q} = \frac{Q}{J} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \\ T \\ Y \end{pmatrix}; E = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho_m U_1 \\ \rho_m u U_1 + \xi_{x1} p \\ \rho_m v U_1 + \xi_{y1} p \\ \rho_m w U_1 + \xi_{z1} p \\ \rho_m H U_1 \\ \rho_m Y U_1 \end{pmatrix}; F = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho_m U_2 \\ \rho_m u U_2 + \eta_{x1} p \\ \rho_m v U_2 + \eta_{y1} p \\ \rho_m w U_2 + \eta_{z1} p \\ \rho_m H U_2 \\ \rho_m Y U_2 \end{pmatrix}; G = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho_m U_3 \\ \rho_m u U_3 + \zeta_{x1} p \\ \rho_m v U_3 + \zeta_{y1} p \\ \rho_m w U_3 + \zeta_{z1} p \\ \rho_m H U_3 \\ \rho_m Y U_3 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{m} \end{pmatrix}$$

其中  $U_1, U_2, U_3$  如下所示：

$$\begin{cases} U_1 = \xi_{x1} u + \xi_{y1} v + \xi_{z1} w \\ U_2 = \eta_{x1} u + \eta_{y1} v + \eta_{z1} w \\ U_3 = \zeta_{x1} u + \zeta_{y1} v + \zeta_{z1} w \end{cases}$$

而總能  $E$  與焓  $H$  的關係如下所示：

$$E = H - p/\rho; H = h + |U_i|^2/2; h = C_p T \quad (i=1,2,3)$$

(2)式中各黏滯項表示如下：

$$E_v = J \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x \tau_{yx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{zx} + \xi_y \tau_{zy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x T_{11} + \xi_y T_{22} + \xi_z T_{33} \\ \xi_x \Re Y_x + \xi_y \Re Y_y + \xi_z \Re Y_z \end{pmatrix}; F_v = J \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x T_{11} + \eta_y T_{22} + \eta_z T_{33} \\ \eta_x \Re Y_x + \eta_y \Re Y_y + \eta_z \Re Y_z \end{pmatrix}; G_v = J \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x T_{11} + \zeta_y T_{22} + \zeta_z T_{33} \\ \zeta_x \Re Y_x + \zeta_y \Re Y_y + \zeta_z \Re Y_z \end{pmatrix}$$

$$\text{其中} \begin{cases} T_{11} = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \\ T_{22} = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \\ T_{33} = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases}, \text{在此 } \kappa \text{ 為熱傳導係數, } \Re \text{ 為有效的交換係數。}$$

(2)式中其餘符號定義： $\tau$  為人工時間項、 $\Gamma$  為預調系統、 $\Gamma_{nc}^{-1}$  為保守預調系統。

對於易變的流體密度流動而言，一典型的狀態方程形式為  $\rho = \rho(p, T)$ ， $T$  在此表示流體溫度。至於混合的密度及黏滯係數，可以由以下體積佔有率的方式來計算：

$$\begin{aligned}\rho_m &= \alpha_l \rho_l + \alpha_g \rho_g \\ \alpha_l + \alpha_g &= 1 \\ \mu &= (1 - \alpha)(1 + 2.5\alpha)\mu_l + \alpha\mu_g\end{aligned}\quad (3)$$

在此下標  $l$  和  $g$  分別表示液相、氣相， $\alpha$  則為體積佔有率。

液相狀態方程式可以展開如下：

$$\begin{aligned}p_l + p_c &= \rho_l K (T_l + T_c) \\ e_l(T) &= C v_l (T - T_0) + e l_0\end{aligned}$$

上式  $p_l, \rho_l, T_l$  分別為液體的壓力、密度、溫度； $K, p_c, T_c$  分別為液體常數、液體的壓力常數、液體的溫度常數。

當氣相假設為一理想氣體時，其狀態方程為：

$$\begin{aligned}p_g &= \rho_g R T_g \\ e_g &= C v_g (T - T_0) + L v + e l_0\end{aligned}$$

上式  $R$  為氣體常數，下標  $g$  表示為氣相， $L v$  為潛熱， $e l_0$  為參考能量，詳細定義參閱文獻[26,30]。

雷諾數定義如下：

$$\text{Re} = \frac{\rho_l U_\infty D}{\mu_l} \quad (4)$$

矩陣  $\Gamma_{nc}$  和  $\Gamma$  定義如下：

$$\Gamma_{nc} = \begin{pmatrix} (\rho_m)_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T & \rho_Y \\ (\rho_m)_p u & \rho_m & 0 & 0 & u\rho_T & u\rho_Y \\ (\rho_m)_p v & 0 & \rho_m & 0 & v\rho_T & v\rho_Y \\ (\rho_m)_p w & 0 & 0 & \rho_m & w\rho_T & w\rho_Y \\ (\rho_m)_p H - 1 & u\rho_m & v\rho_m & w\rho_m & \rho_T H + \rho C_p & H\rho_Y + \rho h_Y \\ (\rho_m)_p Y & 0 & 0 & 0 & \rho_T Y & \rho + Y\rho_Y \end{pmatrix} \quad (5)$$

以及

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T & \rho_Y \\ u\theta & \rho_m & 0 & 0 & u\rho_T & u\rho_Y \\ v\theta & 0 & \rho_m & 0 & v\rho_T & v\rho_Y \\ w\theta & 0 & 0 & \rho_m & w\rho_T & w\rho_Y \\ H\theta - 1 & u\rho_m & v\rho_m & w\rho_m & \rho_T H + \rho C_p & H\rho_Y + \rho h_Y \\ Y\theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T Y & \rho + Y\rho_Y \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{在此 } \theta = \left( \frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right); \quad U_r = \begin{cases} \varepsilon c, & \text{if } |U_i| < \varepsilon c \\ |U_i|, & \text{if } \varepsilon c < |U_i| < c; \quad i=1,2,3 \\ c, & \text{if } |U_i| > c \end{cases}$$

## 2.2 空蝕模式(Cavitation Model)

(1)式中的來源項  $S$ ，其質量流率  $\dot{m}$  包含了  $\dot{m}_l$  及  $\dot{m}_g$  兩項，此兩項皆需要被用來模擬空蝕現象。一個 Ginzburg-Landau 簡化後的方程式形式，被 Merkle 等人所提出[5]。在此模式，質量轉換率  $\dot{m}_l$  從液體到氣體是和體積佔有率以及局部壓力低於蒸氣壓力的量成一比例的。如下所示：

$$\begin{aligned}\dot{m}_l &= \left( \frac{c_{\text{evap}}}{t_\infty} \right) \alpha_l \text{Min}[0, p - p_v] \\ \dot{m}_g &= \left( \frac{c_{\text{prod}}}{t_\infty} \right) \alpha_g \text{Max}[0, p - p_v]\end{aligned}\tag{7}$$

在此  $t_\infty$  表示特徵時間， $p_v$  為蒸氣壓。

而經驗上的蒸氣壓  $p_v$  定義如下：

$$p_v = p_k \exp \left\{ (1 - T_k / T) \left( a + (b - cT)(T - d)^2 \right) \right\}$$

上式  $p_k, T_k, a, b, c, d$  為使用者自訂之常數。

對空蝕係數  $K$  來說定義如下：

$$K = \frac{2(p_0 - p_v)}{\rho_l U_0^2}\tag{8}$$

這裡  $p_0$  為入口壓力， $\frac{1}{2} \rho_l U_0^2$  為動壓。  $c_{\text{evap}} / t_\infty$  和  $c_{\text{prod}} / t_\infty$  都為經驗常數，分別表示流動過程中蒸發和凝結過程的時間比率。一般來說，來源項加入於統御方程中都會和汽/液的密度比率 ( $\rho_g / \rho_l$ ) 成一比例。因此，蒸發和產出常數取決於汽/液密度比率所假設的值。以下是用於所有模擬的數據： $c_{\text{evap}} / t_\infty = 0.9$ 、 $c_{\text{prod}} / t_\infty = 0.9$ ， $\rho_g / \rho_l = 0.0001$ 。

### 2.3 數值離散(Numerical Discretization)

本文中，預調統御方程式(2)被線性數值合併，其為使用雙時步階積分過程的有限差分法。因此，Roe[12]的通量差分分離法(FDS)使用在 MUSCL-TVD 系統中，以提高數值的穩定性，尤其是在劇烈的密度及壓力梯度變化當中更加需要。方程式(2)的對流通量可被線性化成以下形式：

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \Gamma_{nc}^{-1} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \Gamma^{-1} \hat{A} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi} + \Gamma^{-1} \hat{B} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \eta} + \Gamma^{-1} \hat{C} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \zeta} = \bar{S} \quad (9)$$

其中： $\tilde{A}_\Gamma = \Gamma^{-1} \hat{A}$

在此矩陣  $\tilde{A}_\Gamma$  為：

$$\tilde{A}_\Gamma = \Gamma^{-1} \frac{\partial E}{\partial \hat{Q}} = \begin{pmatrix} (1-2\alpha)U_1 & \rho_m \xi_{x1} U_r^2 & \rho_m \xi_{x2} U_r^2 & \rho_m \xi_{x3} U_r^2 & 0 & 0 \\ \frac{\xi_{x1}}{\rho_m} & U_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi_{x2}}{\rho_m} & 0 & U_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi_{x3}}{\rho_m} & 0 & 0 & U_1 & 0 & 0 \\ \frac{-2\alpha U_1}{\rho_m C_p} & \frac{\xi_{x1} U_r^2}{C_p} & \frac{\xi_{x2} U_r^2}{C_p} & \frac{\xi_{x3} U_r^2}{C_p} & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

預調多相系統  $\tilde{A}_\Gamma$  的特徵值矩陣為：

$$\Lambda_\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中：

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_6 = U_1, \quad \lambda_4 = U_1' + c_1', \quad \lambda_5 = U_1' - c_1'$$

在此：

$$U_1' = U_1(1-\alpha) ; c_1' = \sqrt{\alpha U_1^2 + U_r^2} \quad (12)$$

而(12)式中， $\alpha$  定義如下：

$$\alpha = (1 - \beta U_r^2) / 2 ; \beta = (\rho_m)_p + \frac{(\rho_m)_\Gamma}{\rho_m C_p}$$

特徵向量矩陣：

$$(X_1)_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho(U_1' + c_1' - U_1) & \rho(U_1' - c_1' - U_1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_x & l_x & n_x & n_x \\ 0 & 0 & m_y & l_y & n_y & n_y \\ 0 & 0 & m_z & l_z & n_z & n_z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{U_1' + c_1' - U_1}{C_p} & \frac{U_1' - c_1' - U_1}{C_p} \end{pmatrix} \quad (13)$$

特徵向量矩陣之中， $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$  分別為法線向量  $\hat{n}$  在座標軸上之投影量。 $m$ 、 $l$  的定義則參閱文獻[36]。

**時間離散：**

為了提供有效的預調方程式時間精度解，我們使用一雙步階、多階段的方法，如下所示：

$$\left[ \Gamma + \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau}{\Delta t} \frac{\partial Q}{\partial \hat{Q}} \right] \Delta \hat{Q} = -\alpha_i \Delta \tau \left\{ R^{i-1} + \frac{1}{2\Delta \tau} [3Q^{i-1} - 4Q^n + Q^{n-1}] \right\}$$

上式之  $R$  為從  $\hat{Q}$  計算出來的殘餘值， $\alpha$  如前所定義，而  $Q^n$  以及  $Q^{n-1}$  保持為一常數， $Q^{i-1}$  則是從  $\hat{Q}^{i-1}$  計算出來之值。

而在動量方程式的物理時間項和體積佔有率方程式都是用二階、三點、後差分的形式來離散的，也就是：

$$\Gamma_{nc}^{-1} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = \Gamma_{nc}^{-1} \frac{1.5\hat{Q}^{n+1,k+1} - 2\hat{Q}^n + 0.5\hat{Q}^{n-1}}{\Delta t} \quad (14)$$

在此  $n$  代表物理時間， $k$  代表人工時間。人工時間項將由以下的隱式尤拉有限差分形式來取代：

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} = \Gamma^{-1} \frac{\hat{Q}^{n+1,k+1} - \hat{Q}^{n+1,k}}{\Delta \tau} \quad (15)$$

統御方程式(3)可以寫成以下的差分形式：

$$\left( \Gamma_{nc}^{-1} \frac{1.5}{J\Delta t} + \Gamma^{-1} \frac{1}{J\Delta \tau} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \hat{A}_v}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{B}_v}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{C}_v}{\partial \zeta} - \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{Q}} \right) \Delta Q = - \left( \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right)^{n+1,k} + \Gamma_{nc}^{-1} \frac{1.5\hat{Q}^{n+1,k} - 2\hat{Q}^{n,k} + 0.5\hat{Q}^{n-1,k}}{\Delta t} + \left( \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial G_v}{\partial \zeta} + \hat{S} \right)^{n+1,k} \quad (16)$$

而在統御方程式(2)的數值積分，三階 TVD Runge-Kutta 顯示法被寫成下列型式並使用：

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{(1)} &= \hat{Q}^n - \Delta t \Gamma L(Q^n) \\ \hat{Q}^{(2)} &= \frac{3}{4} \hat{Q}^n + \frac{1}{4} \left\{ \hat{Q}^{(1)} - \Delta t \Gamma L(Q^{(1)}) \right\} \\ \hat{Q}^{n+1} &= \frac{1}{3} \hat{Q}^n + \frac{2}{3} \left\{ \hat{Q}^{(2)} - \Delta t \Gamma L(Q^{(2)}) \right\} \end{aligned}$$

在此：

$$L(Q) = \frac{\partial(E - E_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(F - F_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(G - G_v)}{\partial \zeta} - S$$

空間離散：

在方程式(16)黏滯通量的顯式部份是用二階的中間差分的形式來做離散。隱式的部份則是由一階的迎風算則來離散，如下所示：

$$\frac{\partial \tilde{A}_\Gamma}{\partial \xi} = \frac{(\tilde{A}_\Gamma)_{i+1} - (\tilde{A}_\Gamma)_{i-1}}{2\Delta\xi} \quad (17)$$

而  $\tilde{A}_\Gamma$  可以下列所示改寫：

$$\tilde{A}_\Gamma = \tilde{A}_\Gamma^+ + \tilde{A}_\Gamma^- \quad (18)$$

這裡的  $\tilde{A}_\Gamma^+$  和  $\tilde{A}_\Gamma^-$  都是根據矩陣  $\tilde{A}_\Gamma$  的特徵值來計算的。

對流通量向量的顯式部份是用一階或三階的 Roe 算則來做離散，取決於流場中流體變數的梯度。通量差分分離法則是根據 Jacobian 矩陣  $\tilde{A}_\Gamma$  的特徵值和特徵向量來建構的。

就  $\xi$  方向的對流通量導數來說，我們使用了以下的差分形式來處理通量導數：

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = \frac{E_{i+1/2} - E_{i-1/2}}{\Delta\xi} \quad (19)$$

在此：

$$E_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ E(Q_{i+1/2}^L) + E(Q_{i+1/2}^R) - Z_{i+1/2}^{-1} \left[ (X_1)_\Gamma | \Lambda_\Gamma | (X_1)_\Gamma^{-1} \right]_{i+1/2} (\hat{Q}_{i+1/2}^R - \hat{Q}_{i+1/2}^L) \right\} \quad (20)$$

上式各項定義如下：



$$E(Q_{i+1/2}) = \frac{1}{2} [E(Q_{i+1}) + E(Q_i)]$$

$$Z^{-1} = \Gamma^{-1} + \Gamma_{nc}^{-1} \frac{\Delta \tau}{\Delta t} \frac{3}{2}$$

對流通量在中間網格的計算是用以下 Roe 的黎曼解形式：

$$E = \frac{1}{2}(E_R + E_L) - \frac{1}{2}|A|\Delta Q \quad (21)$$

在此  $\Delta Q = Q_R - Q_L$ ， $E_R$  及  $E_L$  為通量，其使用在每一邊面上  $Q_R$  及  $Q_L$  的重建消散向量來計算。

而矩陣  $A$  定義為  $\partial E / \partial Q$ ，並且將  $|A|$  定義為：

$$|A| = X_1 |\Lambda| X_1^{-1} \quad (22)$$

在此：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_1 + U_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_1 - U_r \end{pmatrix}$$

$X_1$  則為非預調系統中，與矩陣  $A$  形式上對角化之矩陣。

為了與預調系統相容，通量差分法因此適用。在此我們需要使用系統的修改，來預調特徵值，以及用主要變數  $\hat{Q}$  重新定義(21)式。因此通量  $E_R$  及  $E_L$  即很容易於其對應面上的主要變數  $\hat{Q}_R$  及  $\hat{Q}_L$  改寫求得。(21)式右邊第二項表示如下：

$$|A|\Delta Q \approx A\Delta Q = \Gamma\Gamma^{-1}\frac{\partial E}{\partial Q}\Delta Q = \Gamma\left(\Gamma^{-1}\frac{\partial E}{\partial Q}\right)\Delta\hat{Q} = \Gamma|\tilde{A}_\Gamma|\Delta\hat{Q} \quad (23)$$

在此  $\Delta\hat{Q} = \hat{Q}_R - \hat{Q}_L$ ，並且以  $\Delta\hat{Q}$  取代  $\Delta Q$ ，以及  $\Gamma|\tilde{A}_\Gamma|$  取代  $|A|$ ，而  $|\tilde{A}_\Gamma|$  則定義如下：

$$|\tilde{A}_\Gamma| = (X_1)_\Gamma |\Lambda_\Gamma| (X_1)_\Gamma^{-1}$$

下標  $\Gamma$  在此表示從預調系統中導出的特徵值矩陣，以及由特徵向量組成的矩陣形式，其分別為  $\Lambda_\Gamma$  及  $(X_1)_\Gamma$ ，如(11)式、(13)式所示。

而(23)式可展開如下：

$$\Gamma|\tilde{A}_\Gamma|\Delta\hat{Q} = |v| \left\{ \begin{array}{c} \Delta(\rho) \\ \Delta(\rho u) \\ \Delta(\rho v) \\ \Delta(\rho w) \\ \Delta(\rho E) \\ \Delta(\rho Y) \end{array} \right\} \hat{n} + \delta v \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho H \\ \rho Y \end{array} \right\} \hat{n} + \delta p \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \\ U_1 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (24)$$

上式各項定義如下：

$$\delta v = M^* \Delta v + \left[ c^* - (1-2\alpha)|v| - \alpha M^* \right] \frac{\Delta p}{\rho U_r^2}$$

$$\delta p = M^* \Delta p + \left[ c^* - |v| + \alpha M^* \right] \rho \Delta v$$

$$\Delta v = \Delta U_1 \cdot \hat{n}$$

$$c^* = \frac{|U'_1 + c'_1| + |U'_1 - c'_1|}{2} ; M^* = \frac{|U'_1 + c'_1| - |U'_1 - c'_1|}{2}$$

另外透過高階精度 MUSCL-TVD， $\hat{Q}_{i+1/2}^{L,R}$  可如下表示：

$$\begin{cases} \hat{Q}_{i+1/2}^L = \hat{Q}_i + (\phi/4) \left\{ (1-\kappa) D^+ \hat{Q}_{i-1/2} + (1+\kappa) D^- \hat{Q}_{i+1/2} \right\} \\ \hat{Q}_{i+1/2}^R = \hat{Q}_{i+1} - (\phi/4) \left\{ (1-\kappa) D^- \hat{Q}_{i+3/2} + (1+\kappa) D^+ \hat{Q}_{i+1/2} \right\} \end{cases} \quad (25)$$

在此， $D\hat{Q}$  的有限通量值以及最小絕對值定義為：

$$\begin{aligned} D^+ \hat{Q}_{i-1/2} &= \text{minmod}(\delta \hat{Q}_{i-1/2}, b \delta \hat{Q}_{i+1/2}) \\ D^- \hat{Q}_{i+1/2} &= \text{minmod}(\delta \hat{Q}_{i+1/2}, b \delta \hat{Q}_{i-1/2}) \\ \delta \hat{Q}_{i+1/2} &= \hat{Q}_{i+1} - \hat{Q}_i \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{minmod}(x, y) = \text{sign}(x) \max \left[ 0, \min \{ |x|, y \text{ sign}(x) \} \right]$$

線性組合參數  $\kappa$  之值，定義在  $-1 \leq \kappa \leq 1$  範圍之內，並且對精度有一定程度的影響，當  $\kappa = 1/3$  以及  $\phi = 1$  時，(25)式就會有三階精度；而當  $\phi = 0$  時，此方程式則有一階精度。在明顯的界面上，流體有包含液相及氣相的空蝕區域存在。然而三階精度上風法的應用，在這些界面產生太過或未達到目標的解，尤其是在質量分數方程式中，其可為計算中一個非穩定的因素。為了改善這個問題，通量估算將產生局部一階精度存在於界面之中。

### 三、數值結果與討論

#### 3.1 三維鈍頭體空蝕模擬

接下來的例子吾人將利用上面所述之數值方法來進行三維水下鈍頭體之空蝕模擬，並分別與文獻[34]之實驗值比對，討論並驗證其結果。(圖 2)表示例子之幾

何外型，尺寸大小如圖說明。Rouse 以及 McNown[34]完成一彎曲通道傳導的數據量測，包含在一圓柱形船之前半部之上的液態水流動，其在此研究中被選擇當成第一個驗證的測試例子。Rouse 以及 McNown 的實驗已經廣泛應用於量測不可壓縮的空蝕預測模式。獨立格點的研究，表現在比較預測表面壓力係數之上。而在粗糙以及良好的格點計算結果幾乎完全相同。因此，接下來的工作我們只想要說明在粗糙格點上的結果；研究影響在空蝕現象中，空蝕係數的變化。於本例子中，標準的次音速流入(固定速度並且推斷壓力)，以及次音速流出(固定壓力並且推斷速度)會被用在此估算當中。

在執行計算之前，我們定義空蝕數為：

$$K = \frac{2(p_0 - p_v)}{\rho U_0^2} = \frac{p_0 - p_v}{p_0 - p_\infty}$$

上式中之  $p_0$ ； $p_v$ ； $p_\infty$  分別表示為總壓、飽合蒸汽壓以及自由流動的壓力。

本模擬的例子是要和 Rouse 和 McNown[34]所進行的實驗數據相比對，模擬鈍頭體在水中的非穩態空蝕現象。初始條件如(表 1)所示，是採用 Jack R. Edward 在文獻[35]中的流體條件，並把其二維模擬延展到三維，計算領域採用軸對稱的方式，以減少計算時間。雷諾數都是定為  $1.36 \times 10^5$ ，使用不同的空蝕係數(K)，分別為 0.8、0.4、0.3、0.2，溫度均固定在 300K。網格使用  $64 \times 50 \times 100$  的 C 型網格如(圖 4、5)所示，液體水的密度為  $998.2 \text{ kg/m}^3$ ，蒸氣壓為 3589Pa。空蝕係數對空蝕現象發生的影響模擬如(圖 6)所示，擷取到  $K=0.2$  到 0.8 的例子中  $s/d$  和  $C_p$  之間的關係，表示空蝕長度在固定下的穩態狀態。在此  $C_p$  定義如下：

$$C_p = \frac{2(p - p_0)}{\rho_l U_0^2}$$

在此  $p$  為局部壓力。當空蝕係數為 0.2、0.3、0.4 時，擴張區的壓力下降到蒸氣壓左右，導致空蝕氣泡的生成，在(圖 6)的壓力分佈可看出，入口水流衝擊至鈍頭體頭部後被滯止，形成局部高壓區域，隨後流體向頭部兩側分流，局部壓力急

劇降低並在鈍頭體肩部形成較大負壓區，水流在此形成空蝕氣泡，氣泡內的壓力基本上是保持恒定的，但在末端會因為水迴流的進入而造成壓力的暴增，在此水所佔的比率也相對提高，開始造成氣泡的崩壞，因此壓力係數在此處變化劇烈，最後流體變化趨於平靜，還原到原流場的壓力狀態。在 0.8 的例子下可以發現，壓力從鼻尖最高點處開始下降到一定程度時便開始回升，而下降到達的壓力並不滿足壓力係數的條件，因此空蝕現象不會發生，於是所表現出的壓力係數分布圖因為沒有相的變化，所以和單相流的壓力分布圖是相同的。(圖 7~10)表示在不同空蝕係數下的不同時間氣泡覆蓋情形，除了發現空蝕在一開始發生的時間變化情形較劇烈，在接近穩態時變化趨於緩慢外，也可以觀察到當空蝕係數變大時，空蝕區達到完全發展的大小所需的時間反而會縮短。

(圖3)中在空蝕區域下游負壓區處會產生迴流現象，該處的速度值相對較小，空蝕氣泡末端閉合處導致迴流區域內的局部壓力急劇升高，形成壓力的高峰。隨著空蝕係數的減小，空蝕氣泡長度增加，迴流區域內的壓力峰值也有逐步增大的趨勢。本文的數值計算結果與Rouse和McNown等人[34]的實驗資料整體上還算符合，能夠正確反映空蝕過程中的壓力變化情形，但在空蝕氣泡閉合區域處，由於紊流的非穩態流動特性，該處的計算結果會與實驗值有所差異，且隨著空蝕係數的減小，其偏差有變大的趨勢。

### 3.2 二維收縮/擴張流道空蝕模擬

接下來所要模擬的是兩個二維收縮/擴張流道內部的空蝕情形，網格如(圖 12)所示，收縮/擴張角度分別為 18-8 度和 4.3-4 度，定流道的最窄部位高度為  $h$ ，分別為 34.3mm 和 43.7mm，所佈的網格數為  $160 \times 50$ ，入口雷諾數分別定為  $1.6 \times 10^6$ ，蒸氣壓為 2000 Pa，水的密度為  $998.2 \text{ kg/m}^3$ ，其他條件如(表 2)所示。在這兩個例子中，空蝕發生在噴嘴的最窄處，也就是咽喉處。這些噴嘴外型在早期已被 Stutz, Reboud 和 Shin 等人[4,11]測試過，且實驗數據也被用來驗證其數值模擬。

根據 Reboud 等人實驗的觀察：

第一個外型，較大的收縮/擴張角(18-8 度)導致一個週期的非穩態空蝕現象，呈現類週期的變動。每個週期都是由以下連續的步驟所組成：首先空蝕現象的出現、然後由液/氣混合所組成的再進入噴流沿著噴嘴下壁的上游流向最下游，直到空蝕中斷為止。蒸氣群於是被主流對流所帶走，最後崩壞。

第二個外型為較小的收縮/擴張角(4.3-4 度)，以及咽喉處較小的收縮幅度。在此例子，可以發現較穩定的空蝕現象，且只有在下游有微小的變動。

這兩個例子所產生的空蝕行為是非常不同的，但是使用此兩種外型結構已經足夠，目的是使用相同的物理和數值模式來有效的模擬這些例子。

吾人將以穩態及非穩態的方法來模擬這兩個例子，(圖 13、14)中表示 4 度和 8 度估算，與文獻[30]光學探針所測量到的穩態速度分佈比較，測量的範圍是集中在空蝕密集發生的區域，y 表示從下壁面算起的垂直距離。整體來說，速度分佈的趨勢大致上和探測數據相同，但大部分的數據和實驗值仍有一定程度的差距。

在 4 度的例子中(見圖 15、16)，空蝕氣泡的形狀穩定無大變化，只在下游處有些微的變動，與實驗所描述的情形吻合。在穩態分析中，平均空蝕流長度約為 15 公分，非穩態平均空蝕流長度約為 20 公分，平均空泡率(Void fraction)約為 40%。在相同流體條件下，Reboud 等人[4]所得到的長度為 8 公分，但是空泡率是不確定的。

在 8 度的例子中(見圖 17、18)，空蝕流的厚度比 4 度要大，迴流較接近咽喉區。在穩態分析中，平均空蝕流長度約為 8 公分，非穩態平均空蝕流長度約為 10 公分，平均空泡率(Void fraction)約為 25%。在相似流體條件下，Reboud 等人[4]

所得到的長度為 5 公分，但是空泡率也是不確定的。(圖 17、18)顯示 8 度空蝕流空泡佔有率的演變，表現約為一個循環，由於空蝕氣泡的長度在每個循環均不固定，因此無法決定確實的週期，即實驗所述之類週期變化。空蝕流的生成和發展在咽喉處發生並流向下游。當前一個形成的空蝕流在下游夠遠處後，另一個空蝕流便會在咽喉處產生。再進入的噴流沿著壁面發展，然後和咽喉處的主流相互影響，接著斷開原本的空蝕流，之後剩餘的空蝕流又再度生成。在這個時候，因為不穩定而崩壞的小空泡又合而為一。重生的空蝕流會再度被主流所帶動。雖然空蝕的形狀、大小有些微的不規則，但是在空蝕流的結構和發展上模擬的還算滿意。

#### 四、結論

在成果中，一個基於預調三維多相 Navier-Stokes 方程式的可壓縮多相流規則，其由混合密度、混合動量以及一部分體積組成之方程式被發展。雙時步進隱式模式加上 LU Decomposition，被使用來調和原本的非穩態物理系統。因此，我們採取 Roe 的通量分離法，來處理空間上的通量離散。數值驗證表現在水下空蝕流中的三維鈍頭體以及二維突縮管。雖然在我們的計算當中，並無考慮紊流模式的影響，數值驗證皆倚賴在模擬鈍頭體流場的實驗數據，但其已經有令人滿意的結果，並且證明一非常相似的表面壓力係數預測，如同 Rouse 及 McNown[34]所做的實驗值。未來的工作必須研究包含各種長度尺寸以及時間尺度的物理現象，例如紊流和氣泡的表面張力影響。

本文所發展的是一套非穩態可壓縮多相的全流域模式，經由統御方程式對流項的 Jacobian 矩陣導出特徵系統，以求解非穩態可壓縮的多維多相流。在空間通量的離散上採取具有 TVD 效應之 MUSCL 型式，以及 Roe 的數值通量分離法，並以 LU Decomposition method 處理時間離散，使程式能在數值穩定與計算時間上求得較佳之平衡。

數值方法所預估的空蝕現象與實驗值比對，其結果還算令人滿意。最後根據以上模擬的過程與結果，歸納出以下幾點結論：

1. Upwind 形式之通量分離法對空蝕現象的分析上有不錯的效果，且為了求解液/氣兩相界面，導入了通量限制子，增加了數值的穩定性。
2. 本文因模擬假設的物理條件是採用可壓縮且等溫的流場，在和真實流體的實驗值做比對時，會有誤差較大的現象，但整體的趨勢走向，還算令人滿意，且在數值計算和所考慮的變因上，有簡單、快速的優點。
3. 未來期望能將此數值方法做進一步的改進，希望能將可壓縮性數值擷取更精確，以及溫度變化等加入數值模擬內，使模擬能更為接近真實的流體特性，以增加其應用層面。



## 参考文献

- [1] Christopher E. Brennen, “Fundamentals of Multiphase Flows”, California Institute of Technology, Cambridge University Press 2005.
- [2] Farouk M. Owis, Ali H. Nayfeh “Numerical simulation of 3-D incompressible, multi-phase flows over cavitation projectiles” European Journal of Mechanics B/Fluids 23, 339-351, (2004).
- [3] Timo KOIVULA “ON CAVITATION IN FLUID POWER” Proc. of 1st FPNI-PhD Symp. Hamburg, pp. 371-382, (2000).
- [4] Reboud JL, Stutz B, Coutier O. Two phase flow structure of cavitation : experiment and modeling of unsteady effects. 3rd International Symposium on Cavitation, Grenoble, France, (1998).
- [5] Merkle, C.L., Feng, J., Buelow, P.E.O. “Computational Modeling of the Dynamics of Sheet Cavitation,” Proceedings of 3rd International Symposium on Cavitation, Grenoble, France, pp. 307-311 (1998).
- [6] Jiangong Qin, ”Numerical Simulation of cavitating Flows by the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method”, PhD Thesis, Wayne State University, Detroit, Michigan, (2000).
- [7] David P. Schmidt, Christopher J. Rutland, and M. L. Corradini, “A Fully Compressible Two-Dimensional Model of Small High-speed Cavitating Nozzle”, Atomization and Sprays, Vol.9, pp255-275, (1999).
- [8] Kirchner, I. N. “Numerical Modeling of Supercavitating Flows,” VKI Special Course on Supercavitating Flows, February (2001).
- [9] Delannoy Y, Kueny JL. Two phase flow approach in unsteady cavitation modelling. Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME-FED, vol. 98. ; 153–158, (1990).
- [10] Ahuja, V., Hosangadi, A., Ungewitter, R., Dash, S.M. “A Hybrid Unstructured Mesh Solver for Mutli-Fluid Mixtures, AIAA Paper 99-3330 (1999).
- [11] Shin, B.R., Ikohagi, T. “A Numerical Study of Unsteady Cavitating Flows,” Proceedings of 3<sup>rd</sup> International Symposium on Cavitation, Grenoble, France, pp. 301-306 (1998).
- [12] Roe, P. L., ‘Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes,’ J. Comp. Phys., Vol.43, pp. 357-372. , (1981).
- [13] Osher, S. and Solomon, F., ‘Upwind difference schemes for hyperbolic systems of

- conservation laws,' *Mathematics and Computers*, Vol.38, pp. 339-374. , (1982).
- [14] Steger, J. L. and Warming, R. F., 'Flux-vector splitting of the inviscid gas dynamics equations with applications to finite difference methods,' *J. Comp. Phys.*, Vol.40, pp. 263-293. , (1981).
- [15] Van Leer, B., 'Flux-vector splitting for the Euler equation,' *LectureNote in Phys.*, Vol.170, pp. 507-512. , (1982).
- [16] Hirsch, C., 'Finite Volume Method and Conservative Discretizations,' *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1, Chap. 5, Wiley, Chichester, pp. 201-236. , (1988).
- [17] Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E.' Numerical simulation of Euler equations by finite volume methods using Rung-Kutta time stepping schemes.' AIAA Paper 81-1259, AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conference. (1981).
- [18] Jameson, A.' Successes and challenges in computational aerodynamics.' AIAA Paper 87-1184, Proc. AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference (1987).
- [19] Butler, P. B., Lambeck, M. F., and Krier, H., 'Modeling of Shock Development and Transition to Detonation Initiated by Burning in Porous Propellant Beds' *Combustion and Flame*, Vol. 46, pp. 75-93, (1982).
- [20] Saurel, R., Larini, M., and Loraud, J. C., 'Ignition and Growth of a Detonation by a High Energy Plasma' *Shock Waves*, Vol. 2, No.1. , pp. 91-102, (1992).
- [21] Rogue, X., Rodriguez, G., Haas, J. F., and Saurel, R., 'Experimental and Numerical Investigation of the Shock-Induced Fluidization of a Particle Bed', *Shock Waves*, Vol. 8, No. 1, pp. 29-45, (1998).
- [22] Richard Saurel and Jean Pierre Cocchi,'Numerical Study of Cavitation in the Wake of a Hypervelocity Underwater Projectile', *J. of Propulsion and Power*. Vol.15, No.4, July-August (1999).
- [23] W. Hirt, B. D. Nichols, "Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries", *Journal of Computational Physics* 39 201–225 (1981).
- [24] Son. , G., "Efficient implementation of a coupled level-set and volume-of-fluid method for three-dimensional incompressible two-phase flows", *Numerical Heat Transfer, Part B; Fundamentals* 43 (6), pp. 549-565, (2003).
- [25] Yang-Yao Niu, "Simple Conservative Flux Splitting for Multi-component Flow Calculations", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol.38 No. 2, pp.203-222, September, (2000).

- [26] Saurel, R., and Cocchi, J.P., “Numerical Study of Cavitation in the Wake of a Hypervelocity Underwater Projectile,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 15, No. 4, pp. 513-522, (1999).
- [27] Kueny JL, Schultz F, Desclaud J., “Numerical prediction of partial cavitation in pumps and inducers.” IAHR Symposium, Trondheim, (1988).
- [28] Kubota A, Kato H, Yamaguchi H., “A new modelling of cavitating flows: a numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section.”, *Journal of Fluid Mechanics*; 240:59–96, (1992).
- [29] R.F. Kunz, D.A. Boger, T.S. Chyczewski, D.R. Stineberg, H.J. Gibeling, T.R. Govindan, Multi-phase CFD analysis of natural and ventilated cavitation about submerged bodies, in: *Proceedings of 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*, ASME Paper FEDSM99-7364, (1999).
- [30] Byeong Rog Shin, Satoru Yamamoto, Xin Yuan, “Application of Preconditioning Method to Gas-Liquid Two-Phase Flow Computations”, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126 / 605, (July 2004).
- [31] Jonathan M. Weiss\* and Wayne A. Smith\*, “Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows”, *AIAA Journal*, Vol. 33 No. 11, (November 1995).
- [32] O. Coutier-Delgosha, J. L. Reboud<sup>1</sup>, Y. Delannoy, “Numerical simulation of the unsteady behaviour of cavitating flows” *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 42:527–548, (2003).
- [33] Patankar SV. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, (1981).
- [34] Rouse, H., and McNown, J. S., “Cavitation and Pressure Distribution: Head Forms at Zero Angle of Yaw,” *State Univ. of Iowa Engineering Bulletin* 32, Ames, IA, (1948).
- [35] Jack R. Edwards, Randall K Franklin and Meng-Sing Liou, “Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for RealFluid Flows with Phase Transitions”, *AIAA Journal*, pp1624–1633, 38, (2000).
- [36] Stuart E. Rogers, James L. C. Chang and Dochan Kwak, “A Diagonal Algorithm for the Method of Pseudocompressibility”, *NASA Ames Research Center, Moffett Field, California 94035*, November 24, 1986.

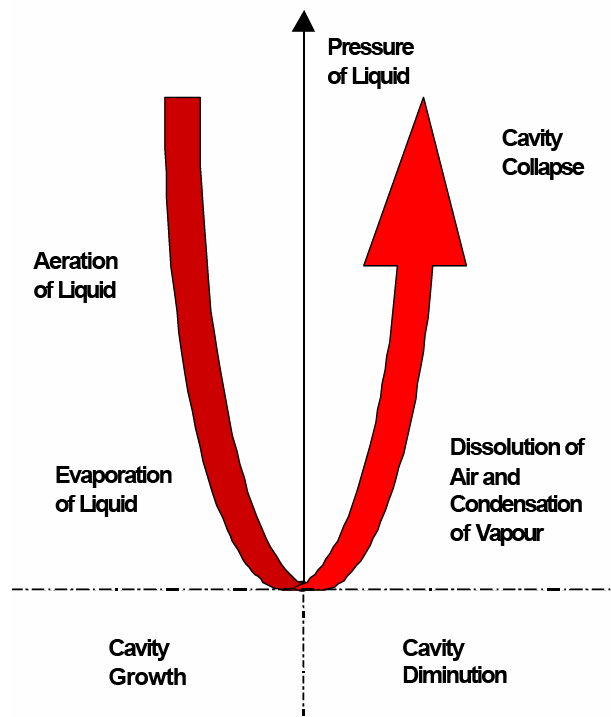


圖 1、空蝕現象過程示意圖

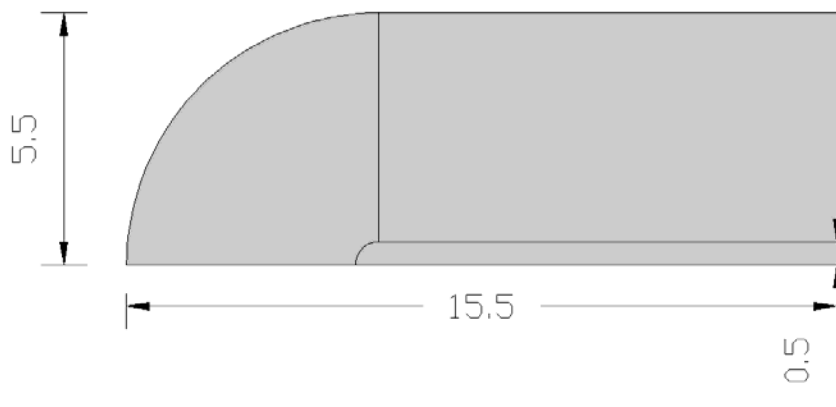


圖 2、三維鈍頭體幾何外型示意圖。(單位：英吋 in.)

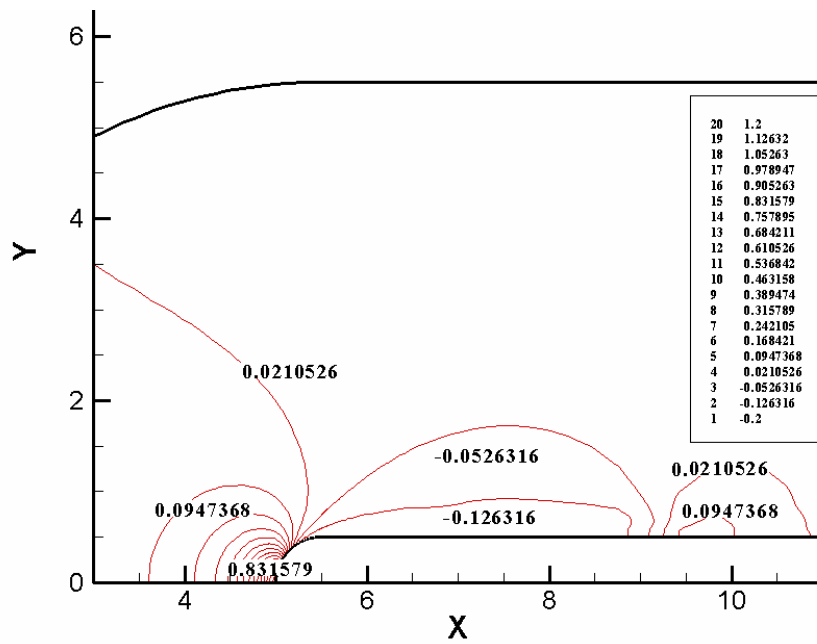


圖 3、壓力係數分佈圖( $K=0.2$ )

$K$	$T_{\infty}, K$	$P_0, Pa$	$U_0, m/s$
0.8	300	11,492	4.317
0.4	300	7,545	4.317
0.3	300	6,557	4.317
0.2	300	5,566	4.317

表 1、流體條件

( $K$ : 空蝕係數,  $T_{\infty}$ : 參考溫度,  $P_0$ : 入口壓力,  $U_0$ : 入口流速)

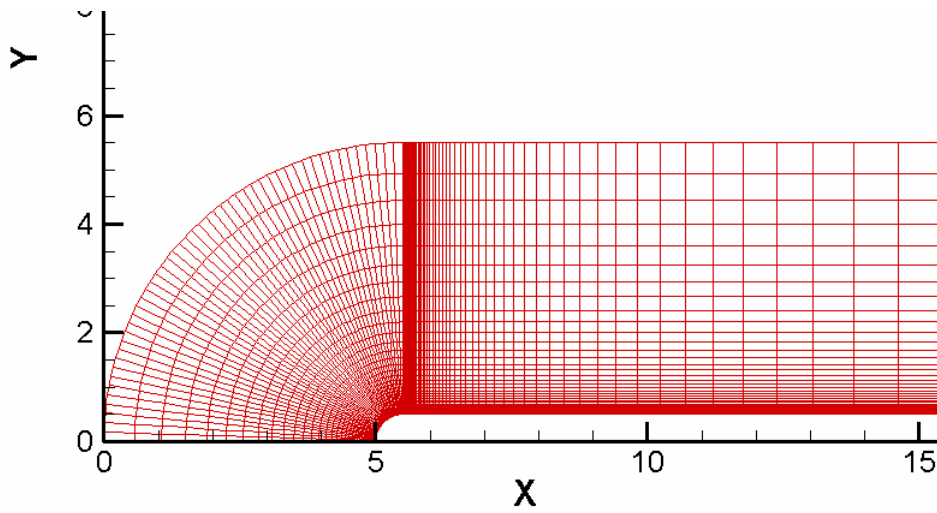


圖 4、三維鈍頭體流場網格側視圖  
(64×50×100, C 型網格, 最小間距:  $5 \times 10^{-3}$  in.)

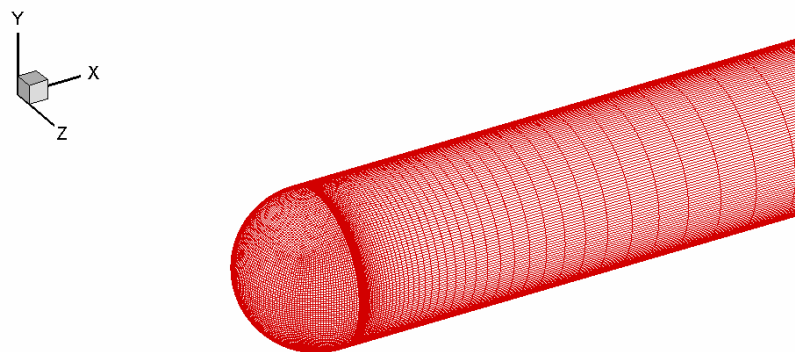
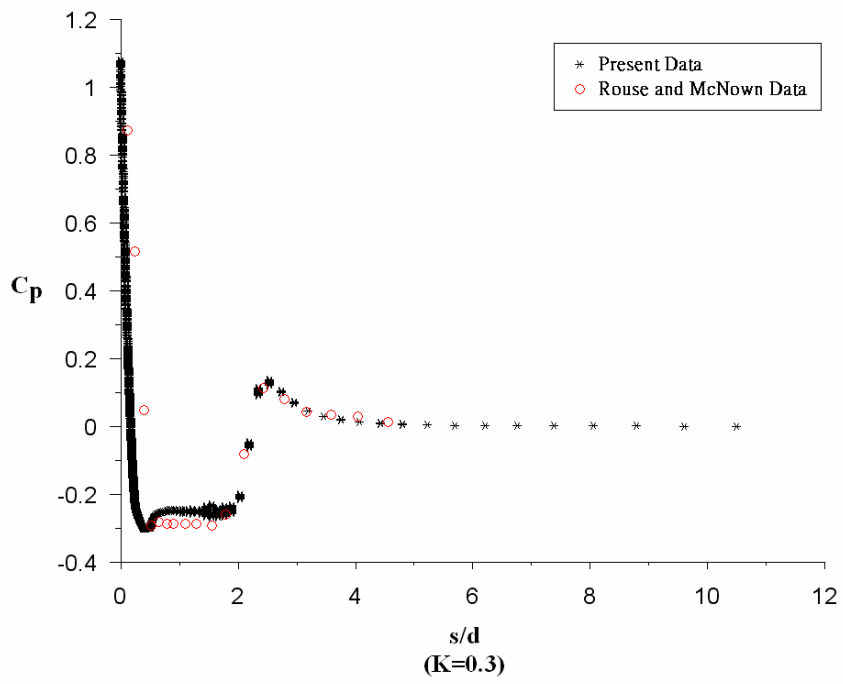
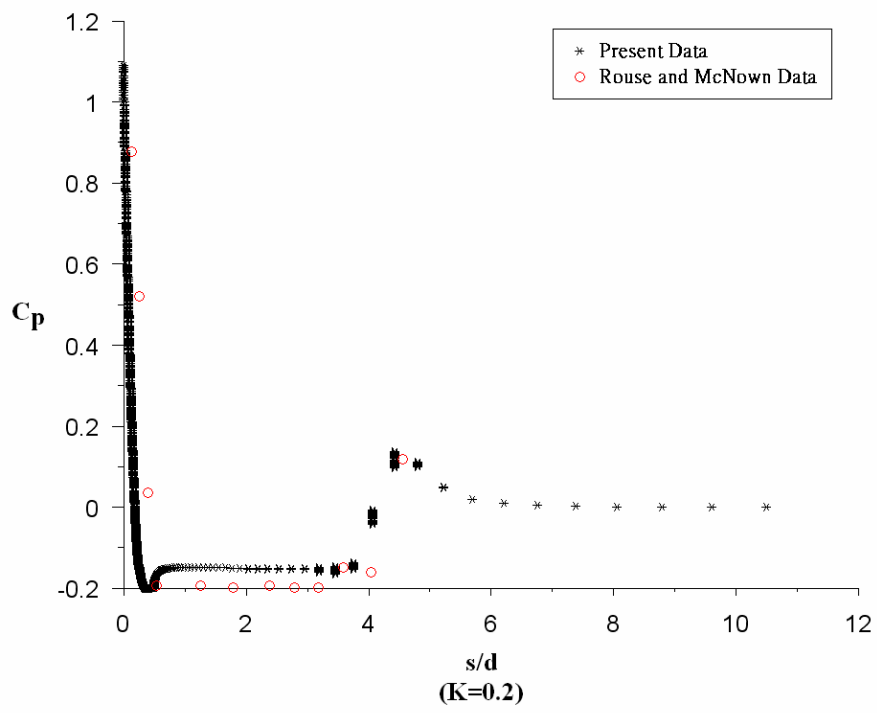


圖 5、三維鈍頭體表面網格示意圖



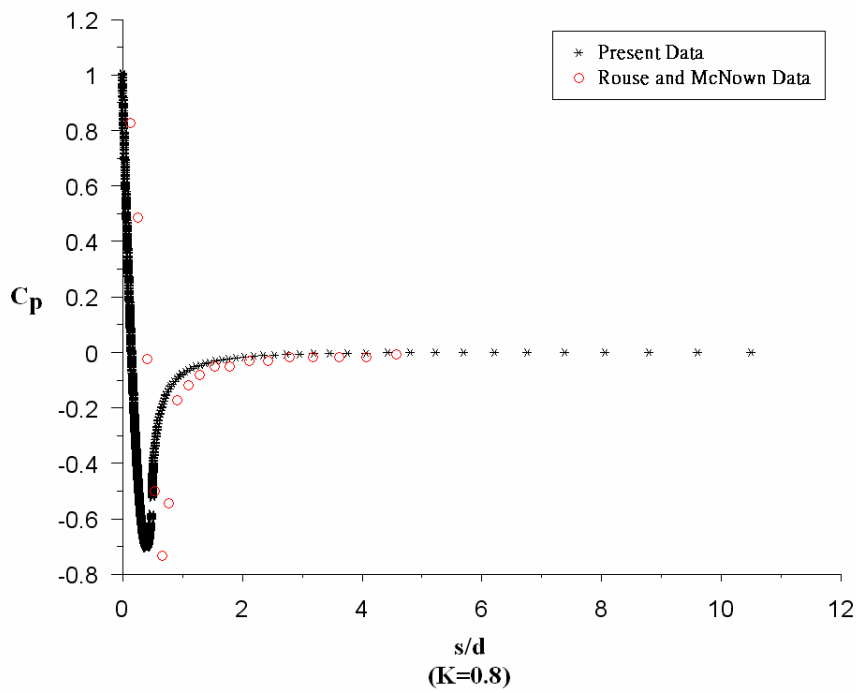
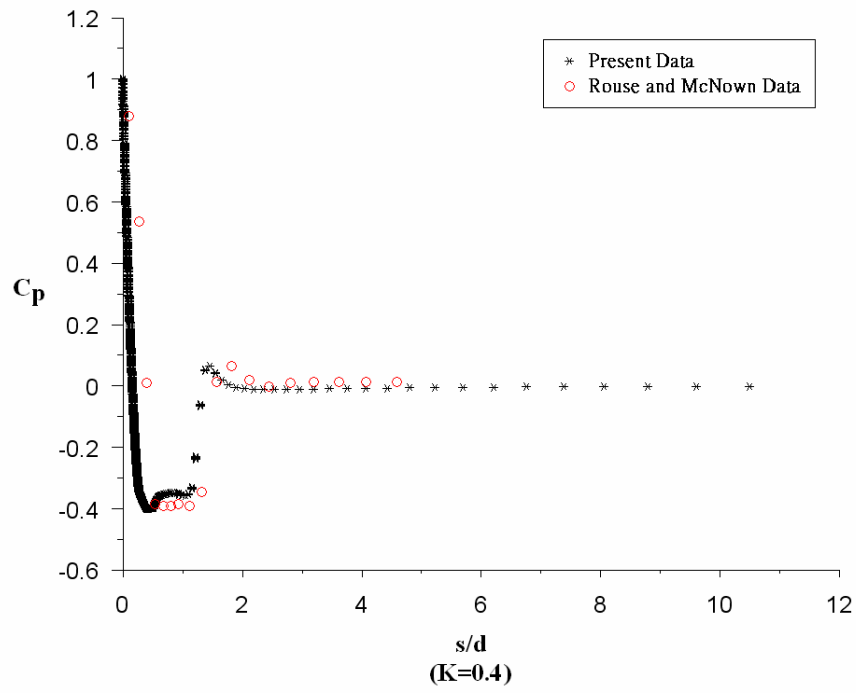
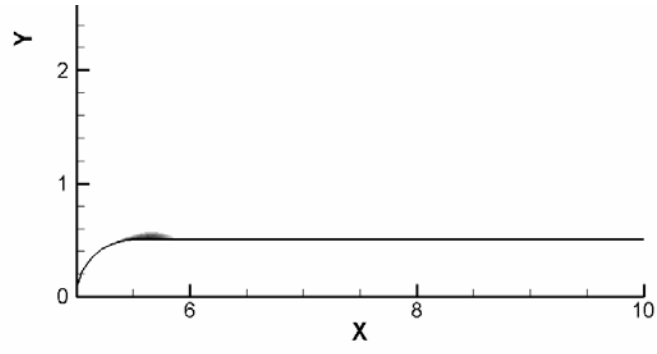
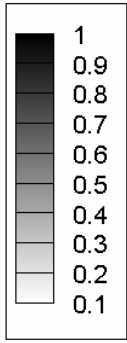
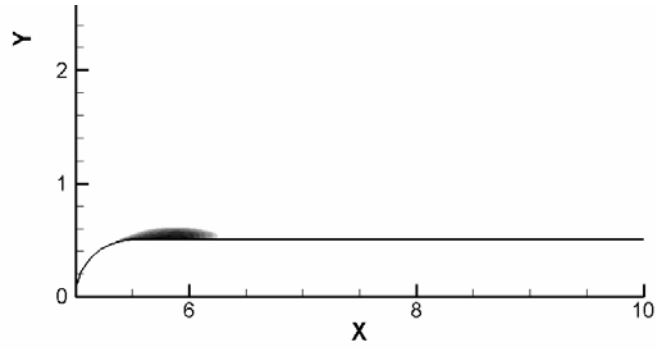


圖 6、鈍頭體表面壓力分佈( $K=0.2\sim 0.8$ )

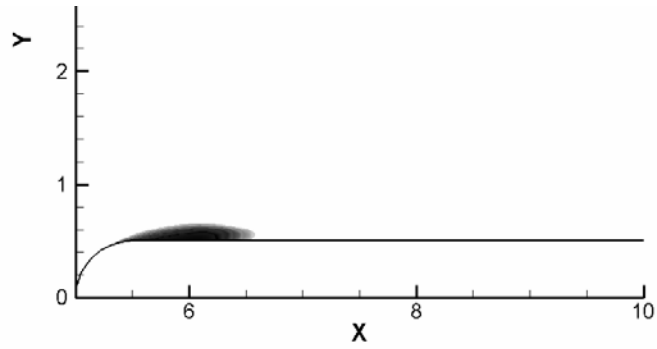




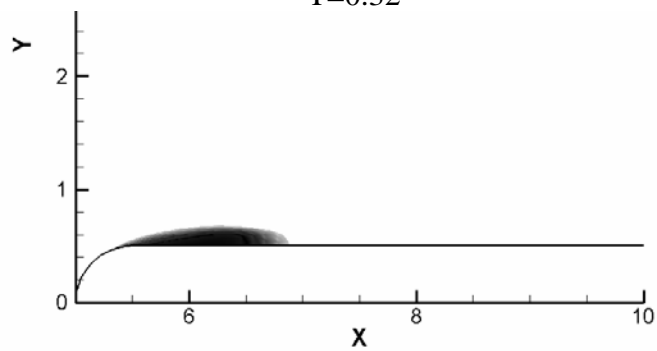
T=0.10



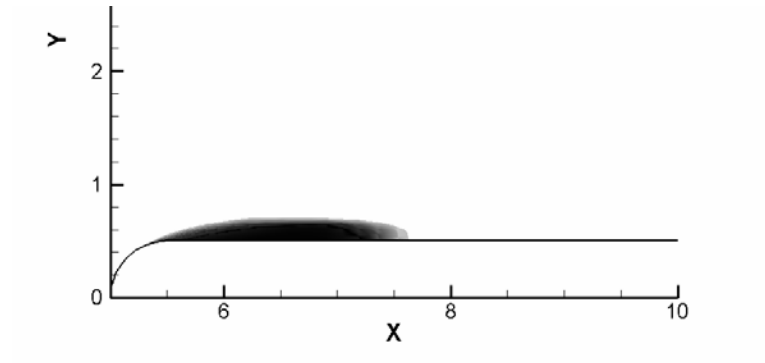
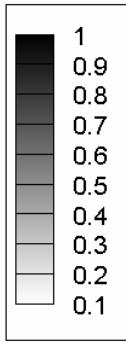
T=0.20



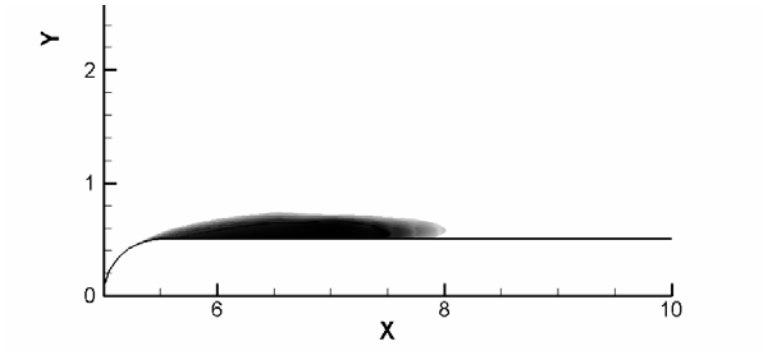
T=0.32



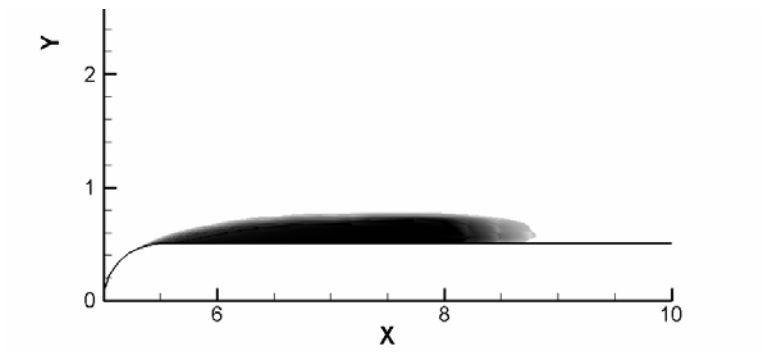
T=0.40



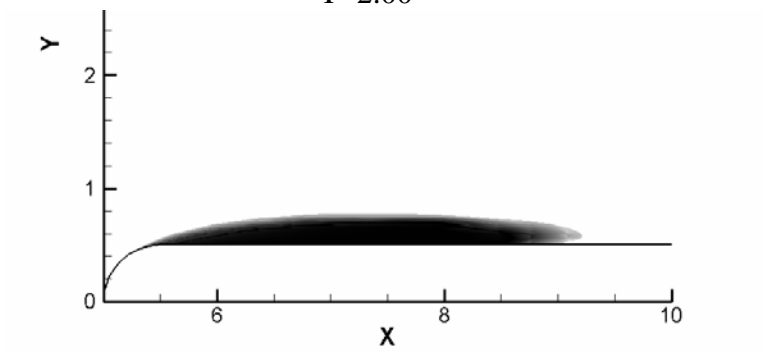
T=0.60



T=0.80

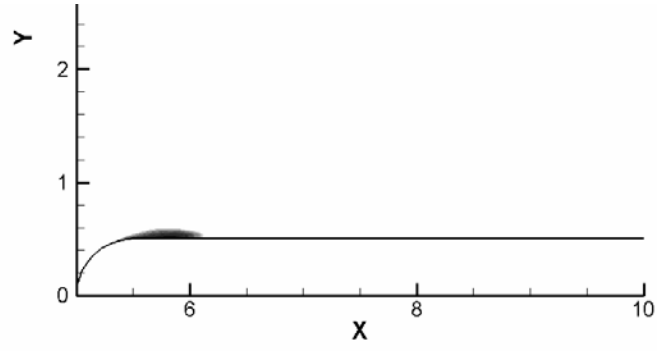
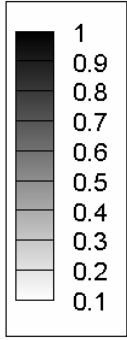


T=2.00

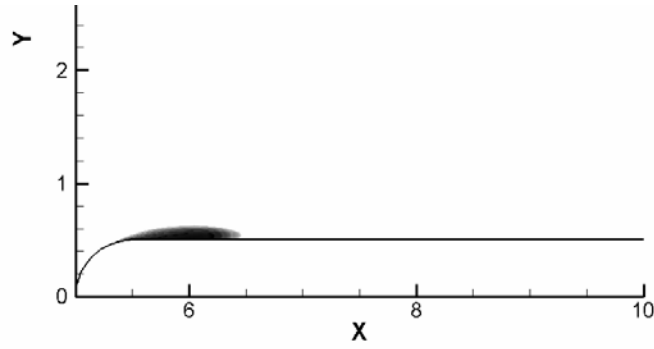


T=3.00

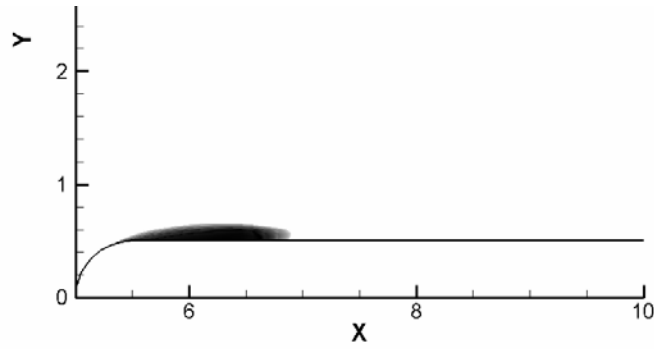
圖 7、三維鈍頭體空蝕氣泡體積佔有率演變側視圖  
( $K=0.2$  ; T 單位 : 秒)



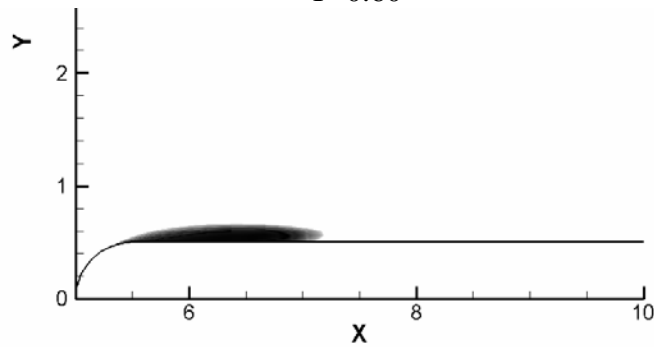
T=0.2



T=0.36

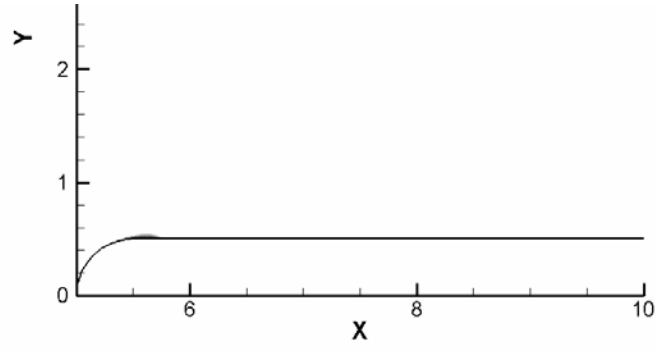
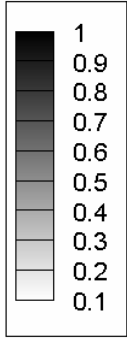


T=0.60

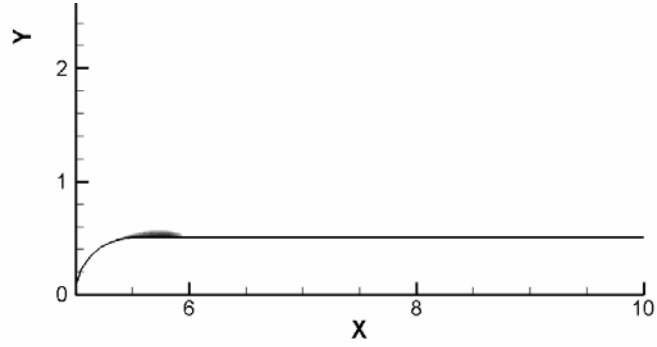


T=0.80

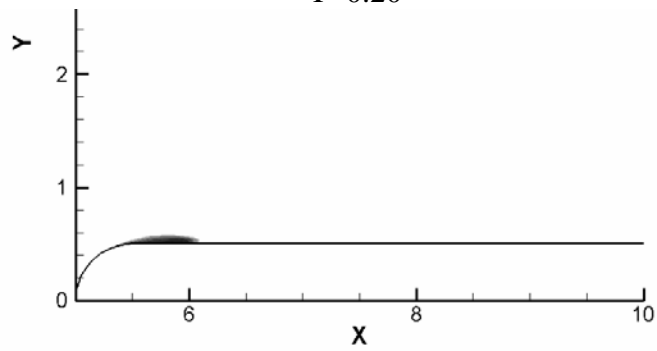
圖 8、三維鈍頭體空蝕氣泡體積佔有率演變側視圖  
( $K=0.3$  ; T 單位：秒)



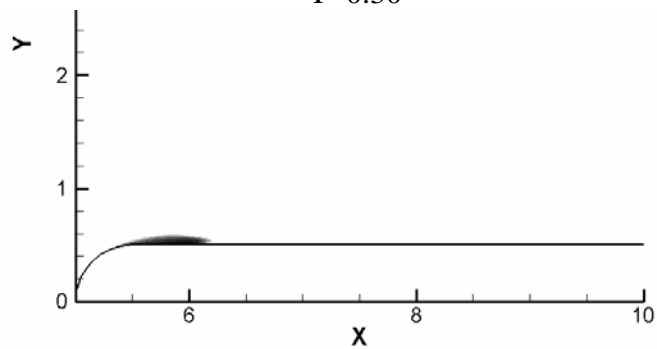
T=0.10



T=0.20



T=0.30



T=0.50

圖 9、三維鈍頭體空蝕氣泡體積佔有率演變側視圖  
( $K=0.4$  ;  $T$  單位：秒)

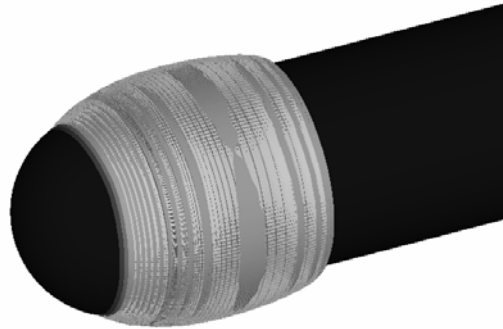
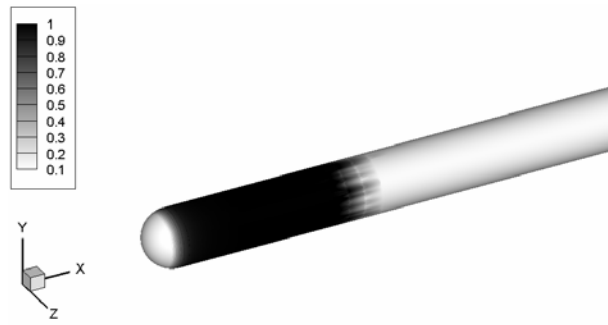
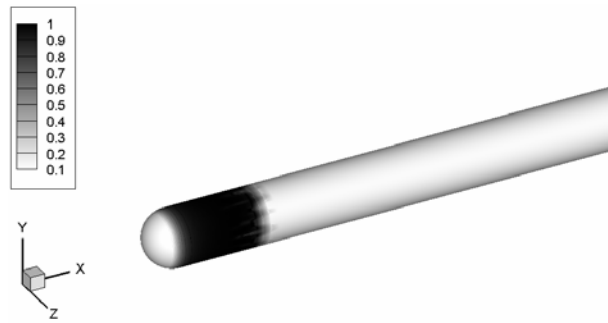


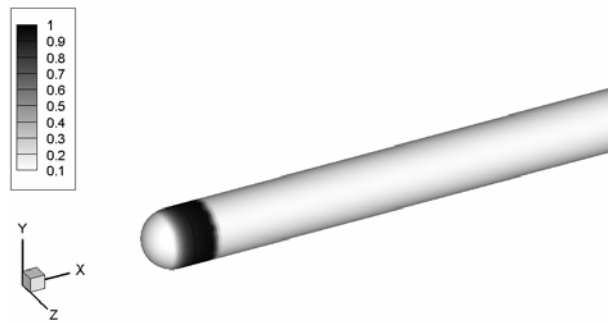
圖 10、三維鈍頭體空蝕氣泡覆蓋圖(T 單位：秒)  
(由上而下分別為  $K=0.2$  ;  $T=3.0$ 、 $K=0.3$  ;  $T=0.8$ 、 $K=0.4$  ;  $T=0.5$ )



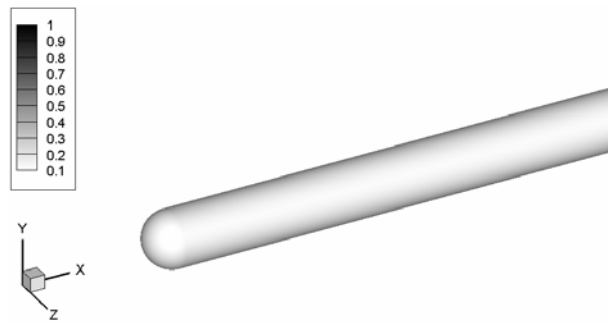
$K=0.2 ; T=3.0$



$K=0.3 ; T=0.8$



$K=0.4 ; T=0.5$



$K=0.8 ; T=1.0$

圖 11、三維鈍頭體氣泡表面體積佔有率圖  
(T 單位：秒)

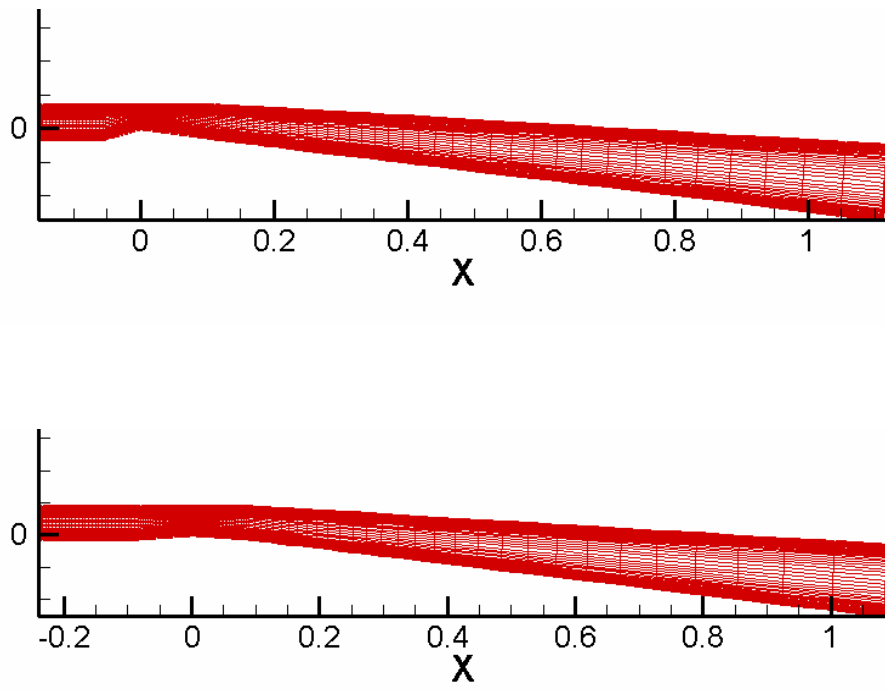
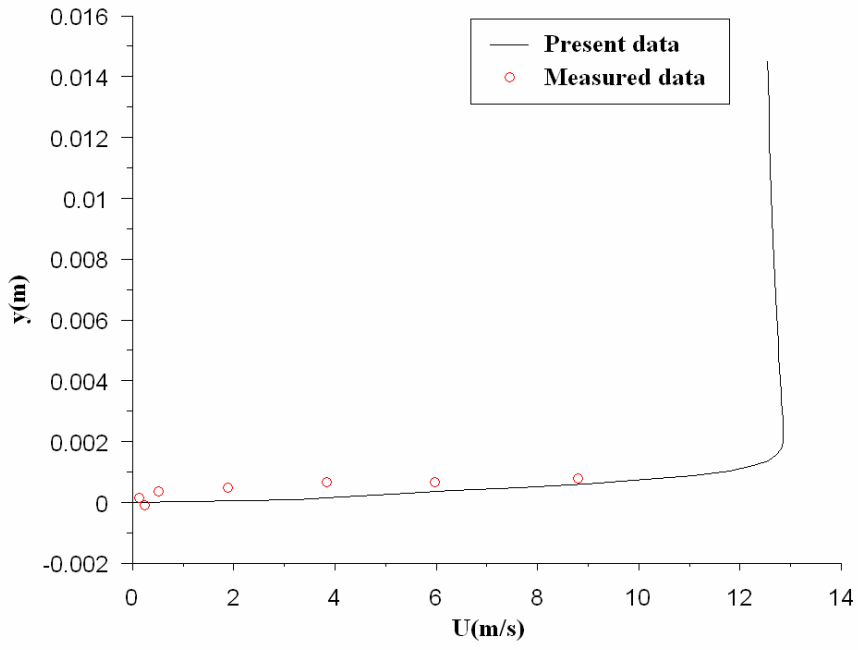


圖 12、二維收縮/擴張流道網格圖

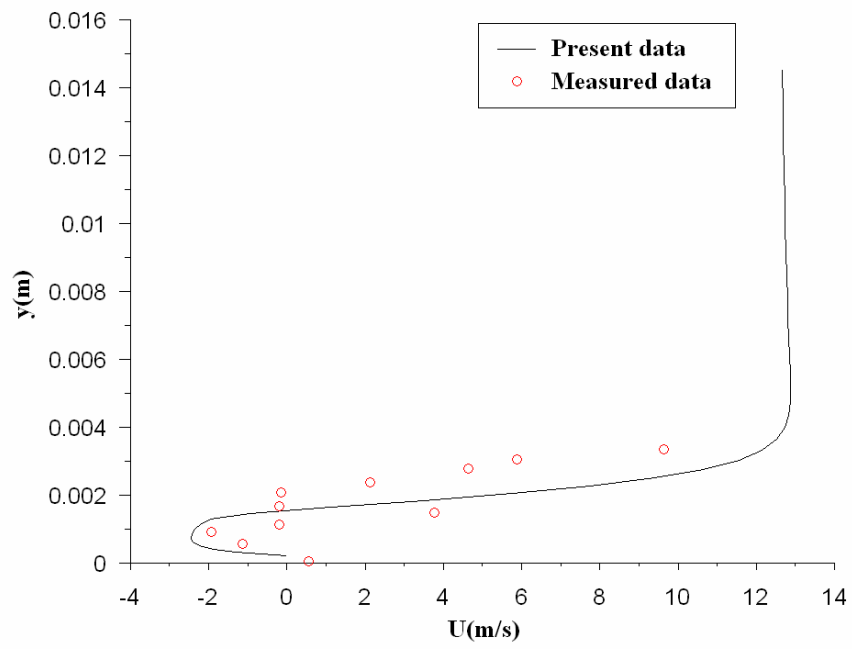
(上圖：18-8 度，下圖：4.3-4 度，網格最小間距： $1.15 \times 10^{-4}$  m)

流體條件	18-8 度	4.3-4 度
入口速度	7.2 m/s	10.8 m/s
空蝕係數	2.4	0.7

表 2、二維收縮/擴張流道流體條件

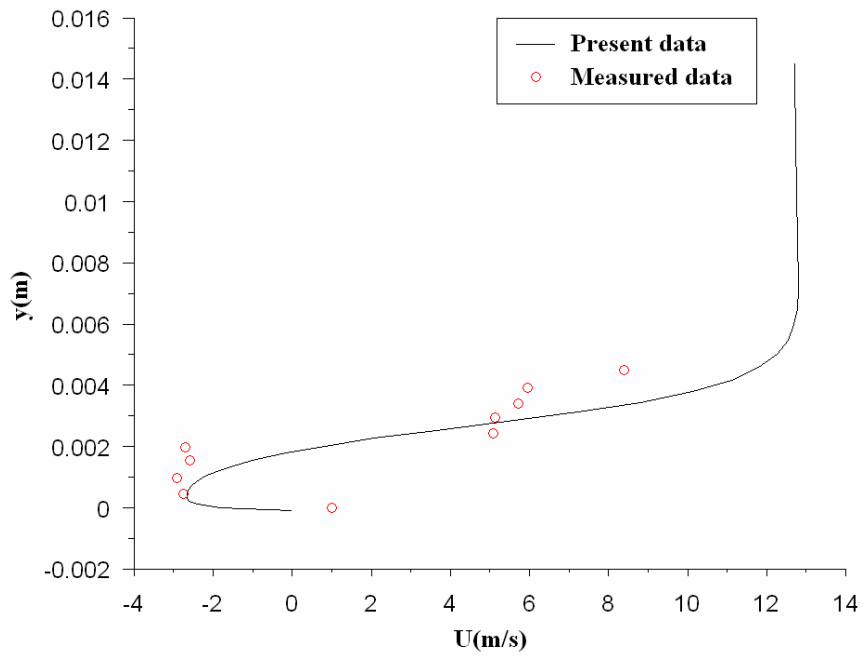


**$x/h=0.10$**

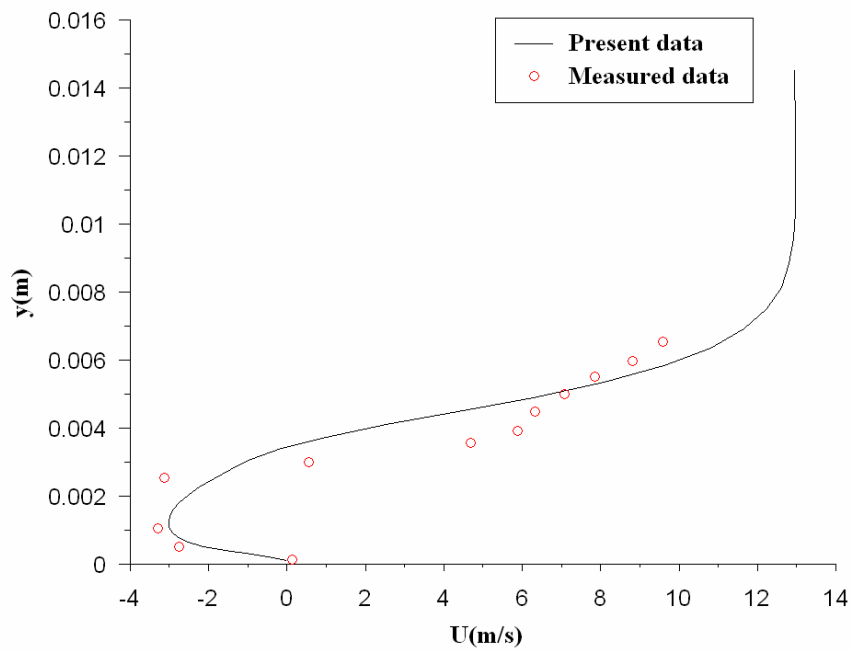


**$x/h=0.51$**



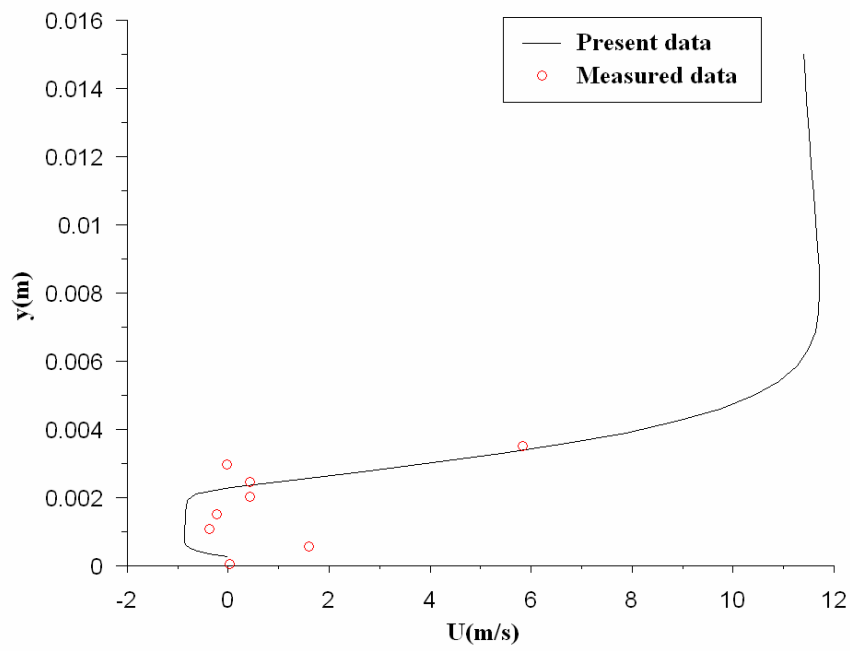


$x/h=0.93$

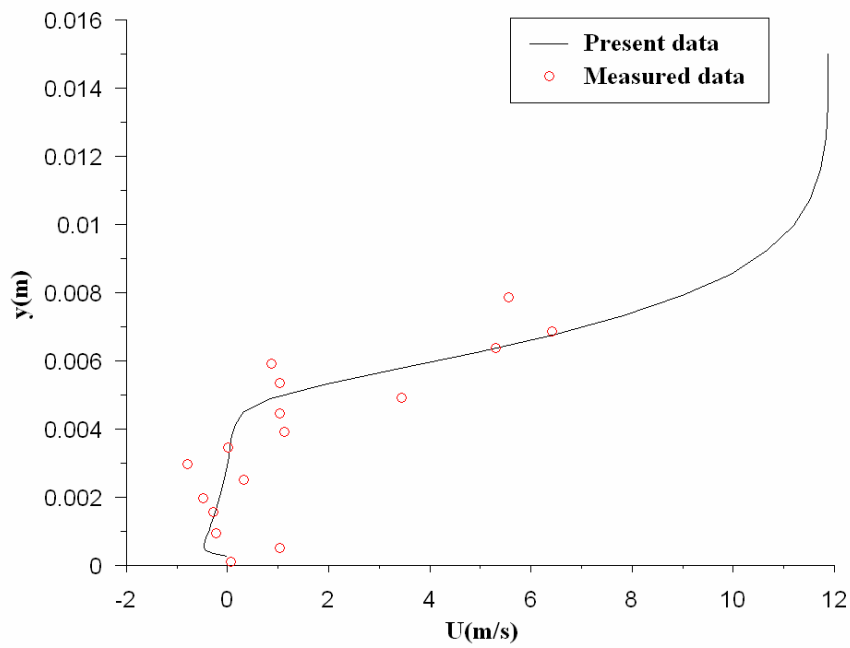


$x/h=1.37$

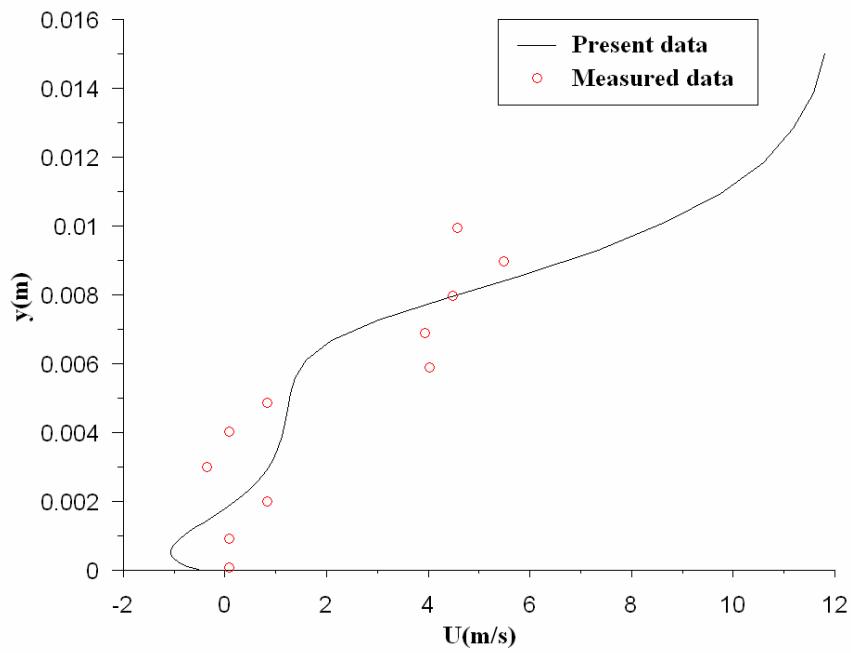
圖 13、4 度擴張流道速度分佈圖(穩態)



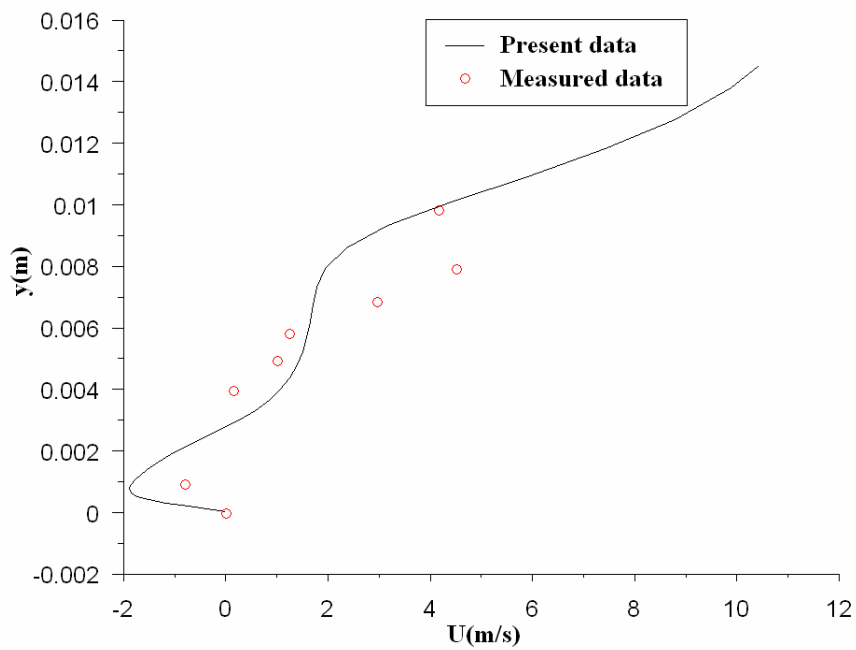
**$x/h=0.40$**



**$x/h=0.92$**



$x/h=1.44$



$x/h=1.90$

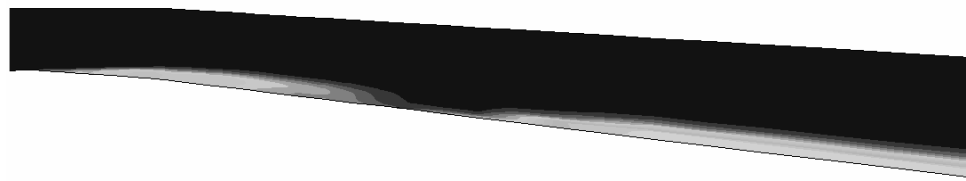
圖 14、8 度擴張流道速度分佈圖(穩態)



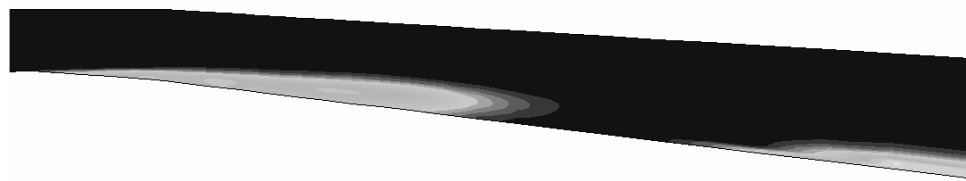
圖 15、4 度擴張流道空蝕流演變圖(穩態體積佔有率)



$T=0.01s$



$T=0.03s$



$T=0.07s$



$T=0.09s$

圖 16、4 度擴張流道空蝕流演變圖(非穩態體積佔有率)

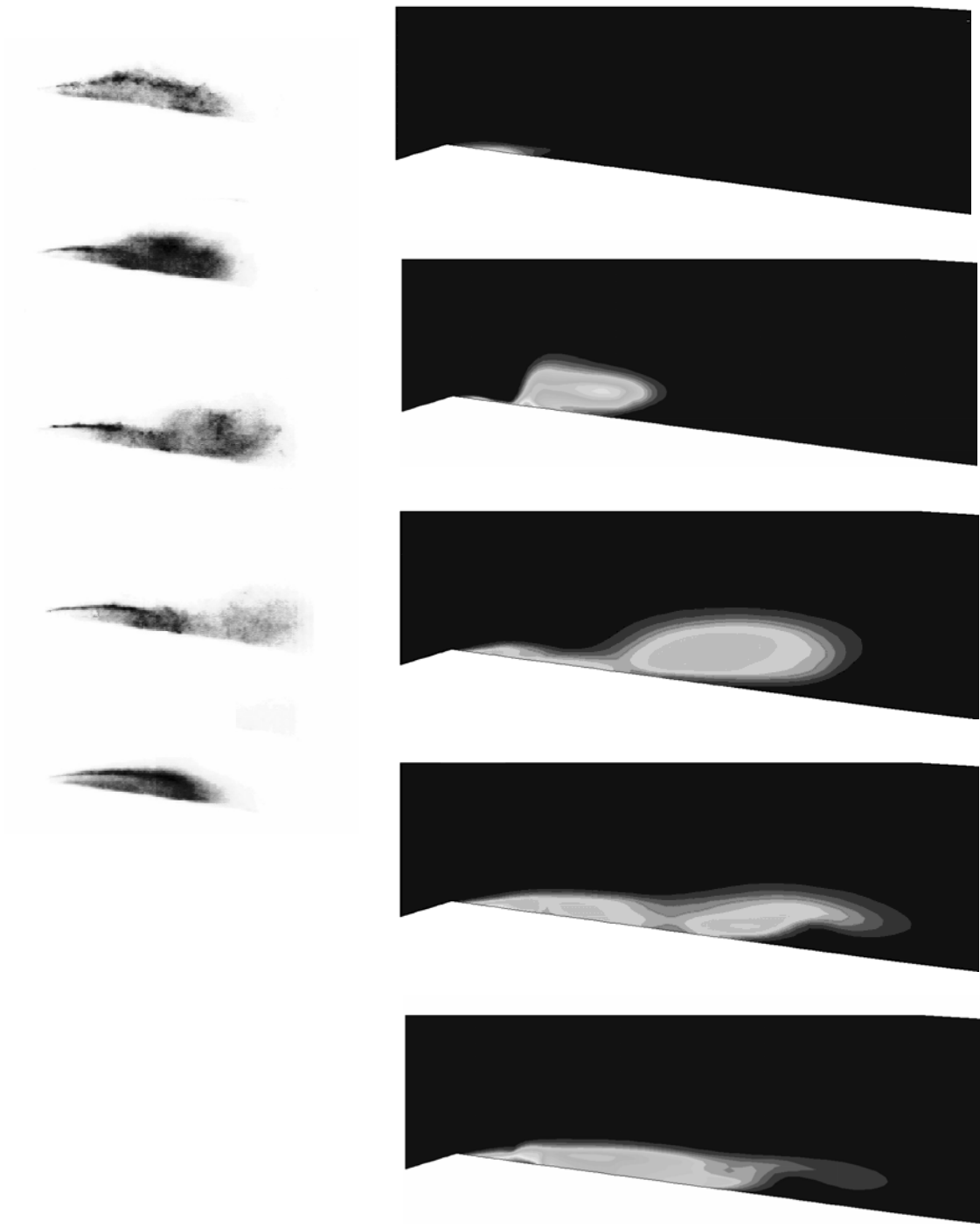
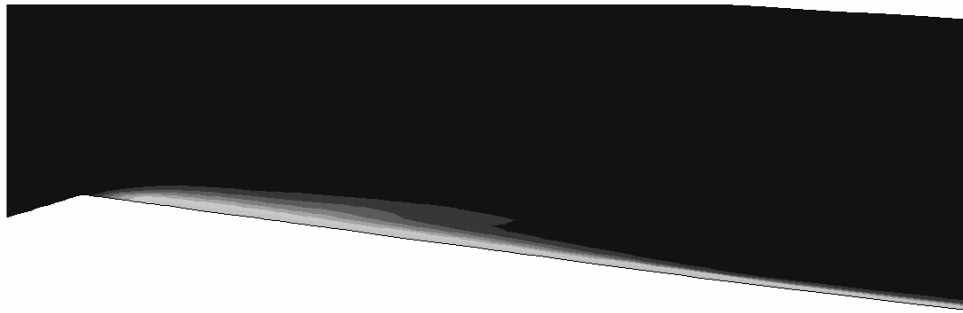
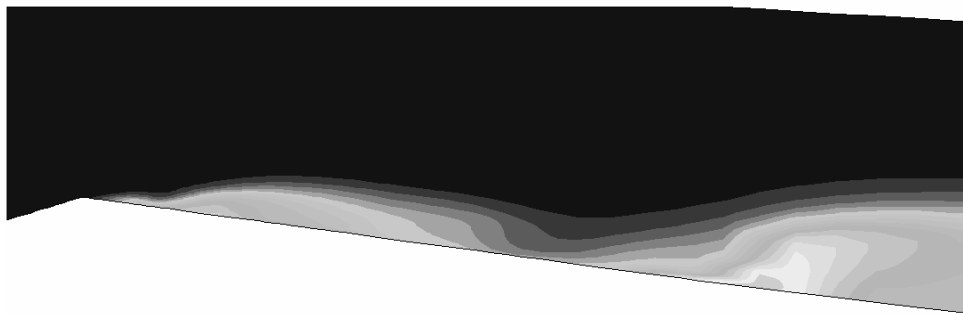


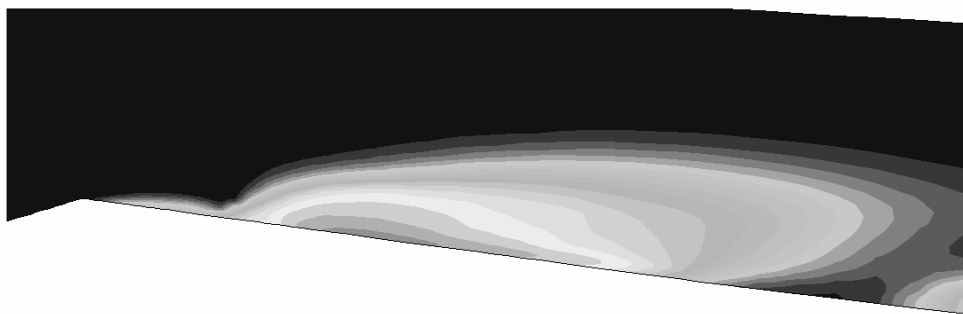
圖 17、8 度擴張流道空蝕流演變圖  
 (穩態體積佔有率，左圖為 Reboud 之實驗圖)



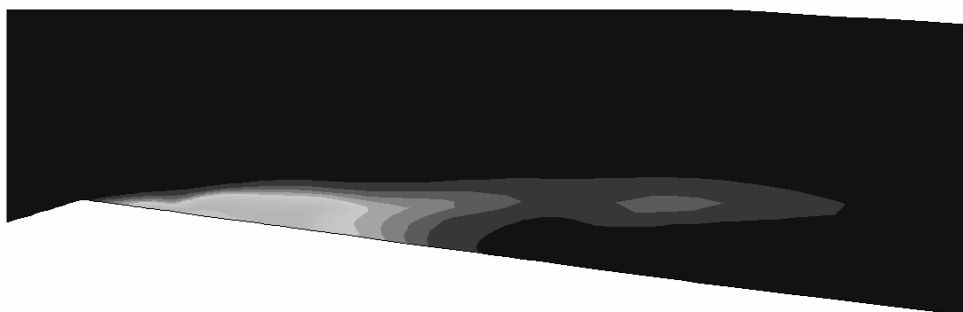
$T=0.010s$



$T=0.035s$



$T=0.070s$



$T=0.120s$

圖 18、8 度擴張流道空蝕流演變圖(非穩態之體積佔有率)