

不可攜帶計算機

一、計算題

1. 請解以下微分方程式 (15%)

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

2. 請用 Gauss-Jordan 消去法求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ -0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}$ 的反矩陣 (15%)

3. 請找出 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 的特徵值 (eigenvalues) 及對應的特徵向量 (eigenvectors), 並請找出一個矩陣 T 使 $D = T^{-1}AT$ 為對角矩陣 (20%)

二、選擇題 (單選題, 每題 5 分)

- ___ 1. 下列關於 $\frac{dy}{dx} + y = x$ 的敘述何者有誤? (A) 它是一階 (First Order) 微分方程式 (B) 它是非齊性 (Non-homogeneous) 微分方程式 (C) 它是常微分方程式 (Ordinary Differential Equation) (D) 它的通解為 $y = x - 1 + Ce^{-x}$ (E) x 是應變數 (Dependent Variable), y 是自變數 (Independent Variable)
- ___ 2. 下列何者為 $\frac{dy}{dx} = x$ 之通解 (General Solution)? (A) $y = x$ (B) $y = -x$ (C) $y = -x + C$ (D) $y = \frac{x^2}{2} + C$ (E) $y = x + C$
- ___ 3. 已知 $\sin x \, dx + \cos y \, dy = 0$ 、 $y(0) = 0$, 則其解為下列何者? (A) $\cos x - \sin y = 1$ (B) $\cos x - \sin y = -1$ (C) $\sin x - \cos y = 1$ (D) $\sin x - \cos y = -1$ (E) 以上皆非
- ___ 4. 函數 $f(t)$ 之 Laplace 轉換是定義為: (A) $\int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt$ (B) $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ (C) $\int_0^{\infty} f(t) dt$ (D) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ (E) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{st} dt$
- ___ 5. 指數函數 e^{at} 之 Laplace 轉換結果為: (A) $\frac{s}{s^2 + a^2}$ (B) $\frac{a}{s^2 + a^2}$ (C) $\frac{1}{s - a}$ (D) $\frac{1}{s + a}$ (E) 以上皆非
- ___ 6. $\frac{6}{s^4}$ 之 Laplace 反轉換結果為: (A) t^3 (B) t^2 (C) $\sin t$ (D) $\cos t$ (E) $u(t - 6)$

不可攜帶計算機

- ___ 7. 下列關於向量之敘述何者是正確的？(A)向量 \vec{A} 與 \vec{B} 之內積定義為 $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$ ，其中 θ 為 \vec{A} 、 \vec{B} 之夾角 (B)向量 $\vec{A} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ 與 $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ 之夾角為 $\pi/4$ (C) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A}$ (D) $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$ ，其中 θ 為 \vec{A} 、 \vec{B} 之夾角 (E) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ 且 $\vec{A} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{B} \neq \vec{0}$ ，則 \vec{A} 、 \vec{B} 互相平行

- ___ 8. 若 $f(x, y, z) = x \sin(y^2 z)$ 、 $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{k}$ ，則下列敘述何者是錯誤的？
 (A) $\nabla f(x, y, z) = \sin(y^2 z) \vec{i} + 2xyz \cos(y^2 z) \vec{j} + xy^2 \cos(y^2 z) \vec{k}$ (B) $\nabla f(3, 1, 0) = 3\vec{k}$
 (C) $D_{\vec{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(y^2 z) - \frac{4}{\sqrt{6}} xyz \cos(y^2 z) + \frac{1}{\sqrt{6}} xy^2 \cos(y^2 z)$
 (D) $D_{\vec{u}} f(1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (E) $D_{\vec{u}} f(1, -1, 0) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

- ___ 9. 令 $f(x) = x^2$ ， $-\pi \leq x \leq \pi$ ， $f(x+2\pi) = f(x)$ ，則下列關於 $f(x)$ 的傅立葉級數 (Fourier Series)

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 中之係數 a_0 、 a_n 、 b_n 的敘述何者正確？

- (A) $a_0 = \pi^2$ ， $a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$ ， $b_n = 0$ (B) $a_0 = \frac{2}{3} \pi^2$ ， $a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$ ， $b_n = 0$
 (C) $a_0 = \frac{2}{3} \pi^2$ ， $a_n = 0$ ， $b_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$ (D) $a_0 = \frac{2}{3} \pi^2$ ， $a_n = \frac{2}{n^2} (-1)^n$ ， $b_n = 0$
 (E) $a_0 = \frac{2}{3} \pi^2$ ， $a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$ ， $b_n = \frac{4}{n^2}$

- ___ 10. 下列敘述何者有誤？(A) $i^{25} = i$ (B) $z = a + ib$ 的共軛複數記為 $\bar{z} = a - ib$ (C) 複數 $z = a + ib$ 的絕對值定義為 $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 - b^2}$ (D) $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (E) $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$