

\*不可攜帶計算機\*

1. 試求出下列微分方程式 (Differential Equation) 的完全解。(25%)

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} - 15y = 0$$

2. 試以高斯消去法 (Gauss Elimination) 求解下列方程式的完全解。(25%)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 8x_5 &= -2 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 &= -10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 9x_5 &= 4 \end{aligned}$$

3. (a) 已知直線  $L$  通過點  $A:(3,2,1)$ ，直線之方向向量  $\mathbf{b}=[1,1,1]$ ，試求此直線方程式。(10%)

(b) 試推求垂直於平面  $3x+4y+5z=9$  之單位法線向量  $\mathbf{n}$ 。(10%)

- (c) 試求向量函數  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$  沿圖 1 所示之螺旋曲線  $C$  的線積分  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  之值，其中螺旋曲線  $C$  可表為  $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ ， $0 \leq t \leq 2\pi$ 。(10%)

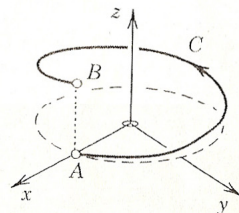


圖 1 螺旋曲線  $C$  的示意圖

4. 試求以下所示繩長為  $L$  之一維波傳問題之解：

- 控制方程式： $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- 邊界條件： $u(0,t) = u(L,t) = 0$
- 初始條件： $u(x,0) = f(x)$ ， $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$

其中  $u(x,t)$  = 質點位移； $c$  = 波速。(20%)