

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 認識球面幾何 幾何學概念電腦動畫設計

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2521-S-216-001-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：中華大學應用數學系

計畫主持人：李華倫

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 10 月 27 日

# 行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

## 認識球面幾何-幾何學概念電腦動畫設計

計畫編號：NSC 93-2521-S-216-001-

計畫主持人 李華倫

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

### 一、中文摘要：

本計畫製作一系列動畫短片，探討球面與平面之間的豐富幾何性質

主要表現尤拉公式，測地線的基本概念，球面三角形面積算法，球面三角形之內角和大於 $180^\circ$ ，並由此延伸探討球面幾何與平面幾何的關係，運用變形的動畫特效來解釋同胚，保角映射，地圖製作的原理等等。主要目標是製作出結合數學、音樂與視覺藝術之動畫，讓一般大眾能夠欣賞幾何。

關鍵詞：尤拉公式，球面幾何，保角映射，同胚

### 二、英文摘要：

We made a series of 3D computer animations for spherical geometry.

Main topics are Euler's formula, Geodesics on sphere, area of spherical triangle, the angles sum of any spherical triangle is greater than  $180^\circ$ , relation between spherical geometry and plane geometry, homeomorphism between two surfaces, conformal mapping, stereographic projection, Mercator projection (Mathematics of Cartography). Our works combine mathematics, music and visual art.

### 三、計畫緣由與目的：

本計畫的構想來自幾個方面，首先從歷史來看，公元前300年歐幾里德(Euclid)所寫的幾何原本(The Elements)中所提到的關於點、線、面的公設中第五公設，也就是三角形內角合為 $180^\circ$ 這件事情千年來吸引著數學家嘗試用幾何原本中的其他公設來證明它，一直到公元1817年高斯(Gauss)才確立第五公設無法被其他公設所證明，而非歐幾何的2維模型則要到1840年Lobachevsky才提出如何建立三角形內角合小於 $180^\circ$ 的幾何世界。球面幾何更是黎曼(Riemann)在1854年的演講中所提出三角形內角合大於 $180^\circ$ 的幾何世界，由此可見球面幾何深具歷史意義。

而從國際角度來看，現今網路上有很多專談球面幾何的網頁，如美國Rice大學John C. Polking的The Geometry of sphere，美國伊利諾大學John M. Sullivan的Spherical Geometry Demo等等，可見球面幾何是大家都覺得很有趣的題材。最後從教學觀點來看，所有學生都知道我們的地球基本上是個球體，但數學教學上我們卻只談平面幾何，其實適度的球面幾何教材可以讓學生覺得數學是那麼的實際，進而活化數學教學。因為上述觀點讓我積極的投入本計畫。

### 四、研究方法：

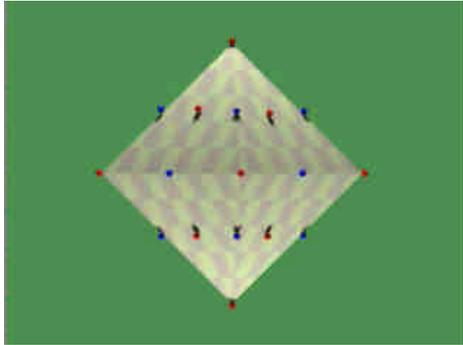
我們從網路收集資料並參考商業電影製作動畫的方式，探討如何才能產生生動的幾何影

片，經過仔細比較發現以第一人稱遨遊幾何曲面之間的方式效果最好，能讓觀賞者有身歷其境的感覺進而思考。

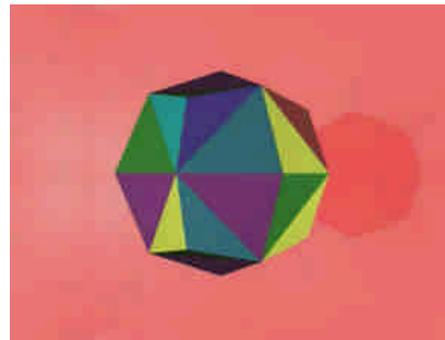
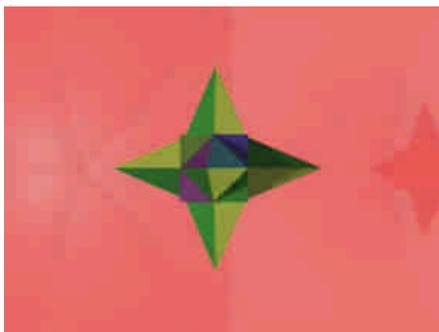
我們製作動畫主要用動畫軟體 Blender，然後用 Microsoft windows XP 系統的 movie maker 軟體合成音樂，撰寫程式的部分則使用程式語言 Python，主要是因為 Python 是 Blender 的 script 介面所使用的語言。

#### 五、計畫成果：

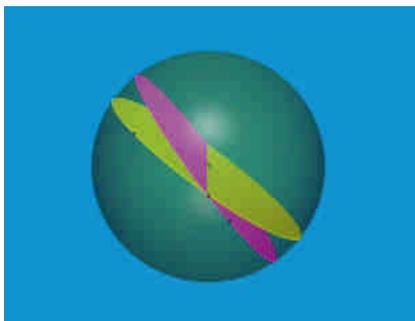
- 凸多面体 Euler Number=2 的證明(2 分 24 秒的動畫)



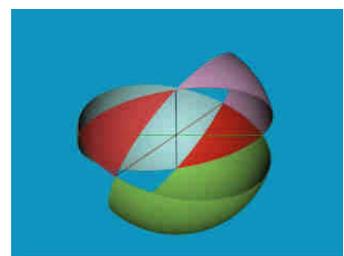
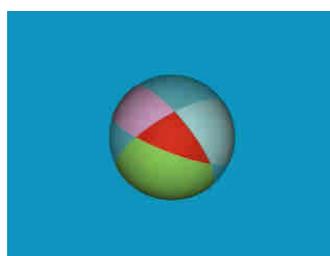
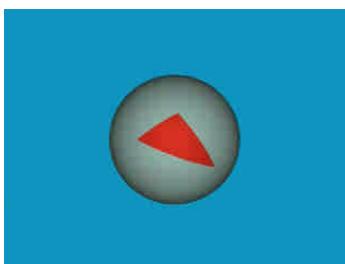
- 和球同胚的多面體(20 秒的動畫)



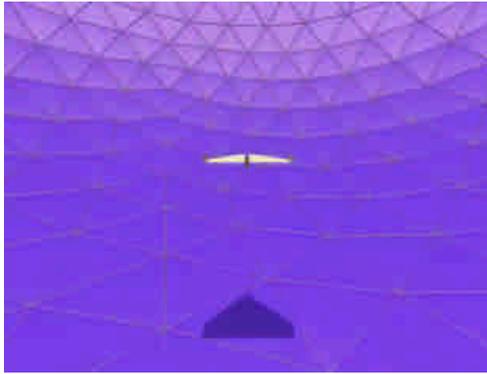
- 球面上的測地線(1 分 01 秒的動畫)



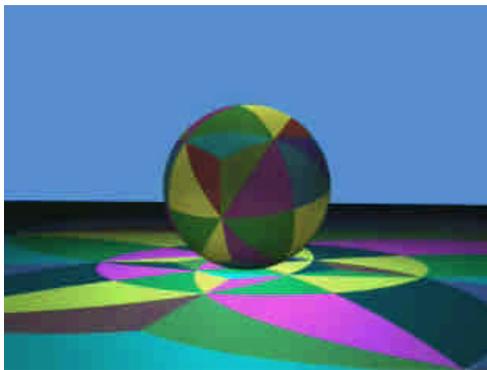
- 球面三角形面積與內角合的關係(1 分 20 秒的動畫)



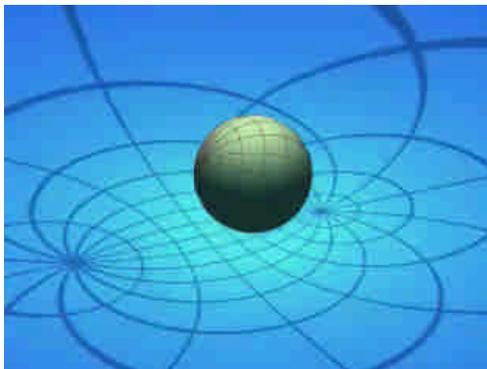
- 球與巨蛋多面體(1 分 34 秒的動畫)



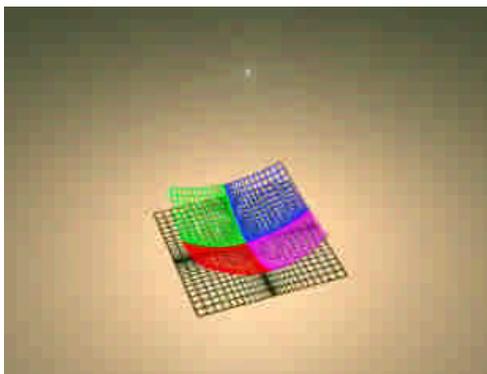
- Stereographic projection I (1 分 58 秒的動畫)



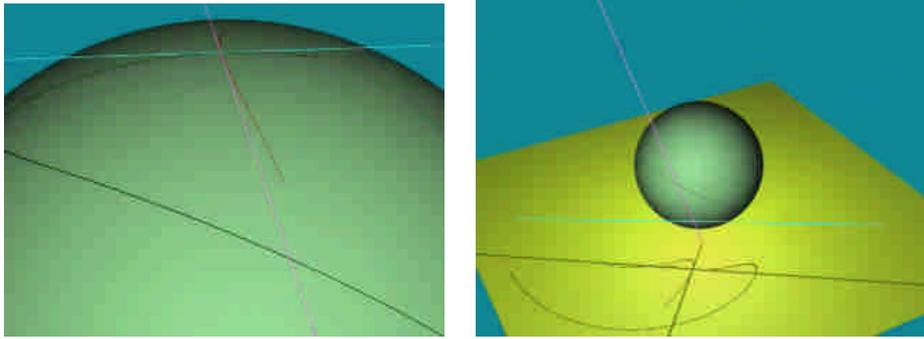
- Stereographic projection II, 旋轉的球 (1 分 20 秒的動畫)



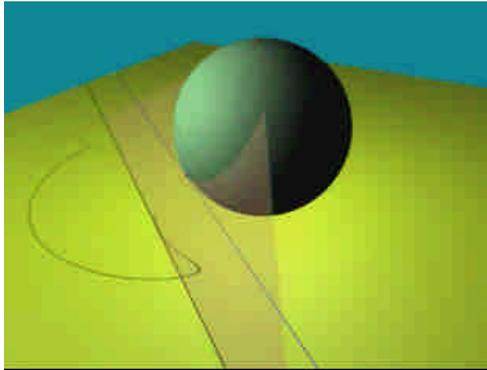
- Stereographic projection III, 反映射 (33 秒的動畫)



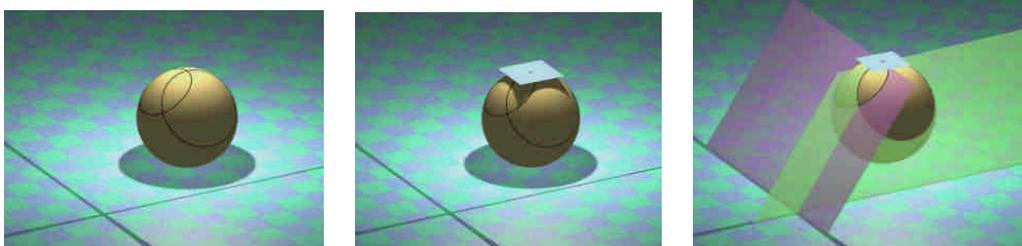
- 球面上曲線夾角的意義 (1 分 20 秒的動畫)



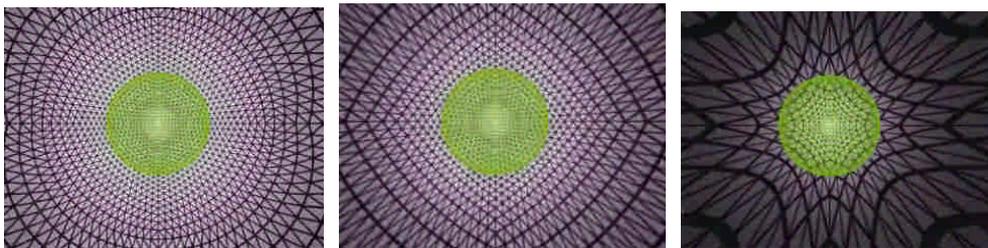
- 何謂保角映射 (46 秒的動畫)



- Stereographic 投影是保角映射的證明 (47 秒的動畫)



- 球面到平面的非保角映射的例子 I (26 秒的動畫)



- 球面到平面的非保角映射的例子 II (13 秒的動畫)



- Mercator 地圖製作 part I, 將 Stereographic projection 運用在地球上 (1 分 31 秒的動畫)



- Mercator 地圖製作 part II, 轉動地球 (3 分 28 秒的動畫)



- Mercator 地圖製作 part III, 繞著地球跑 (53 秒的動畫)



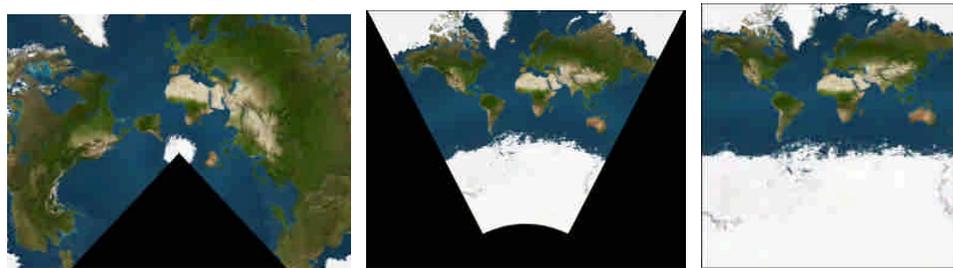
- 從球到平面的一個保角 homotopy (40 秒的動畫)



- 從平面到柱形面的一個 homotopy (26 秒的動畫)



- Mercator 地圖製作 part IV, 地圖的完成 (55 秒的動畫)



#### 六、計畫成果自評：

我們製作的成果，自己相當滿意，也得到一些數學界朋友的欣賞。部分作品已受邀在 2005 年 5 月 30 日台大數學系 Colloquium 演講及 2005 年 10 月 18 日交通大學應用數學系 Colloquium 演講時展出。

但仍有兩點可加強，首先是關於使用我們製作的這些動畫來做輔助教材的效果到底如何？是否有達到預期之效果？應該要製作問卷來統計分析，但因我們系上幾何課程為一學期，目前尚未實施問卷調查，將在這學期實施。第二點是時間上尚來不及將作品全部上網供大家使用，但這點我們會儘快完成。

#### 七、參考文獻：

Osserman, Robert (1995) “Poetry of the Universe” (Anchor Books)

Rossi, Mario : <http://www.space-graphics.com>